Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

7

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Геометрия

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

7 КЛАСС

Учебное пособие для общеобразовательных организаций

Москва
«Просвещение»
2015

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
Г35

16+

Авторы:
Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков,
В. Б. Некрасов, И. И. Юдина

Геометрия. Методические рекомендации. 7 класс.
Г35 Учеб. пособие для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др.]. — М. : Просвещение, 2015. — 95 с. : ил. — ISBN 978-5-09-034831-7.

Пособие предназначено для учителей, которые преподают геометрию в 7—9 классах по учебнику Л. С. Атанасяна и др. Оно написано в соответствии с методической концепцией этого учебника, полностью соответствует ему как по содержанию, так и по структуре. Пособие будет полезно в первую очередь начинающим учителям.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-034831-7

Предисловие

Книга является первой частью методического пособия для учителей, преподающих геометрию в 7—9 классах по учебнику Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной «Геометрия. 7—9 классы» (М.: Просвещение, 2013—2015). В ней отражена методическая концепция учебника, направленная на достижение учащимися (с помощью учителя и учебника) требуемых Федеральным государственным образовательным стандартом результатов обучения, как предметных, относящихся к геометрическим знаниям и умениям, так и более широких — метапредметных и личностных, включающих всестороннее развитие личности, потребность в непрерывном продолжении образования и самосовершенствовании.

Будучи нацеленным в первую очередь на предметные результаты обучения, пособие содержит комментарии к теоретическому и задачному материалу и методические рекомендации по проведению уроков по теме каждого параграфа. В самом начале комментариев и рекомендаций к данному параграфу говорится о его назначении. Далее внимание учителя обращается на те или иные моменты, связанные с изучением теоретического материала и решением задач. Для наиболее сложных теорем курса даны примерные планы проведения их доказательств. Эти планы рекомендуется записать на доске и в тетрадях, чтобы учащиеся смогли лучше усвоить логику рассуждений как при изучении теоретического материала в классе, так и при домашней работе с учебником. Указаны теоремы, которые можно предложить учащимся проработать самостоятельно по учебнику.

При изучении курса геометрии решению задач должно быть уделено большое внимание. Все новые понятия, теоремы, свойства геометрических фигур, способы рассуждений должны усваиваться в процессе решения задач. На решение задач следует отводить в среднем не менее половины каждого урока. Достижению этой цели способствует большое количество и разнообразие задач, содержащихся в учебнике. Основными являются задачи к каждому параграфу. Среди них в начале курса значительную роль играют практические задания (начертить ту или иную фигуру, измерить те или иные отрезки или углы и т. д.). Дополнительные задачи к каждой главе имеют двойное назначение: для основной работы, если задач к какому-то параграфу главы окажется недостаточно, и для повторения материала данной главы. Более трудные задачи можно использовать для внеклассной работы. К каждому классу в учебнике приведены задачи повышенной трудности. Они не являются обязательными и предназначены для индивидуальной работы с учащимися, проявляющими особый интерес к математике. Их можно использовать также в кружках и на факультативных занятиях.

Помимо задач из учебника, для работы в классе можно использовать задачи из рабочих тетрадей, входящих в данный учебно-методический комплект, а также упражнения, предложенные в данной книге. Среди них есть задачи по готовым рисункам, которые могут помочь подвести учащихся к новым понятиям и утверждениям, а также задачи для лучшего осмысления и усвоения изученного материала, для подготовки к самостоятельной или контрольной работе. Даны образцы возможного оформления решения задач.

Целый ряд задач: основных, дополнительных и задач повышенной трудности — имеют электронную версию, содержащуюся в «Единой коллекции ЦОР. Набор ЦОР к учебнику «Геометрия. 7—9 классы» авторов Л. С. Атанасяна и др.». Электронный адрес school-collection.edu.ru. Их можно использовать при наличии компьютерного обеспечения.

К каждому параграфу даны рекомендации по распределению задач для работы в классе и дома. В домашних заданиях наряду с номерами пунктов учебника и номерами задач указаны номера вопросов для повторения к соответствующей главе. Предполагается, что при подготовке к уроку учащийся должен найти ответы на эти вопросы в указанных пунктах учебника. Такой подход формирует умение самостоятельно работать с учебником.

Комментарии и рекомендации к каждому параграфу завершаются формулировкой основных требований, которые предъявляются к учащимся после изучения данного параграфа. Требования относятся как к знанию теоретического материала, так и к умению решать задачи и овладению теми или иными универсальными учебными действиями.

По каждой теме в книге приведены примерные самостоятельные и контрольные работы, указано назначение самостоятельных работ (обучающая или проверочная).

Варианты самостоятельных и контрольных работ, причём разного уровня сложности, и варианты математических диктантов можно брать также из дидактических материалов (авторы Б. Г. Зив и В. М. Мейлер), входящих в данный учебно-методический комплект.

Представлены карточки для устного опроса учащихся по материалу каждой главы. Их можно использовать как в текущем, так и в итоговом контроле знаний и умений учащихся. Объём вопросов каждой карточки учитель может менять в зависимости от цели опроса и времени, отведённого на опрос.

Книга содержит также рекомендации по проведению уроков вводного и итогового повторения.

В заключение рекомендаций к каждой главе даны решения отдельных задач этой главы, а также комментарии и указания к некоторым задачам. Их назначение — показать либо образцы рассуждений, либо примерное оформление решения.

В соответствии со структурой основного учебника по каждому классу в конце пособия даны решения либо комментарии и указания к решению отдельных задач повышенной трудности.

Примерное поурочное тематическое планирование составлено из расчёта, что на изучение геометрии в каждом классе отводится 2 часа в неделю (всего 68 часов за учебный год) — так называемый второй вариант планирования. В соответствии с этим по каждому параграфу указано примерное количество отводимых на него уроков.

Для первого варианта тематического планирования, отличающегося от второго варианта тем, что в 7 классе на геометрию отводится 50 часов в год (а не 68 часов, как во втором варианте), распределение уроков по темам 7 класса указано в самом конце рекомендаций по соответствующей главе. Кроме того, в конце пособия приведено примерное тематическое планирование учебного материала для второго варианта тематического планирования.

Учителю следует иметь в виду, что все рекомендации, приведённые в книге, являются примерными, их не нужно рассматривать как обязательные. В зависимости от степени подготовленности и уровня развития учащихся конкретного класса учитель может и должен вносить коррективы как в методику проведения урока, так и в подбор заданий для классной, самостоятельной и домашней работы.

На всех уроках геометрии нужно исходить из того, что изучение этого предмета направлено не только на достижение предметных целей — знакомство с различными геометрическими фигурами и их свойствами, но и на решение более важных задач, определяемых Федеральным государственным образовательным стандартом: формирование личности учащегося, развитие его логического мышления, умения ясно, точно и компетентно излагать свои мысли, аргументировать высказанные утверждения, всестороннее развитие творческих способностей учащегося.

ГЛАВА I

Начальные геометрические сведения *(10 ч)*

В первой главе рассматриваются простейшие геометрические фигуры — точка, прямая, отрезок, луч, угол, вопросы сравнения и измерения отрезков и углов, вводятся понятия смежных и вертикальных углов, перпендикулярных прямых.

Введение основных понятий опирается на наглядные представления и на тот опыт, который накоплен учащимися при изучении математики в 1—6 классах. Понятие аксиомы в первых двух главах не вводится и сами аксиомы не формулируются в явном виде. Вместе с тем необходимые исходные положения, на основе которых изучаются свойства геометрических фигур, приведены в описательной форме уже в первой главе.

Практические приложения геометрического материала, изложенного в этой главе, раскрываются в пунктах «Провешивание прямой на местности», «Единицы измерения. Измерительные инструменты» и «Измерение углов на местности». Соответствующую практическую работу можно выполнить в удобное время учебного года.

При решении задач этой главы следует прежде всего опираться на наглядные представления учащихся.

Примерное поурочное планирование

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Прямая и отрезок	1	1—8	С-1
§ 2. Луч и угол	1	9—16	С-2
§ 3. Сравнение отрезков и углов	1	17—24	С-3
§ 4. Измерение отрезков	2	25—31	С-4
§ 5. Измерение углов	1	32—40	С-4
§ 6. Перпендикулярные прямые	2	41—49	С-5
Решение задач	1	1—49	—
Контрольная работа № 1	1	—	К-1

§ 1 Прямая и отрезок *(1 ч)*

Назначение параграфа — систематизировать сведения о взаимном расположении точек и прямых; рассмотреть свойство прямой: через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну; ввести понятие отрезка; рассказать о практическом проведении (провешивании) прямых на местности.

Урок полезно начать с беседы о возникновении и развитии геометрии, используя вводный текст учебника, приложение 2, а также дополнительную литературу, в том числе книгу Г. И. Глейзера «История математики в школе» (М.: Просвещение, 1982, 1983), статьи из Большой советской энциклопедии и Детской энциклопедии.

В беседе важно подчеркнуть, что геометрия возникла в результате практической деятельности людей: нужно было сооружать жилища, храмы, проводить дороги, оросительные каналы, устанавливать границы земельных участков и определять их размеры. Важную роль играли и эстетические потребности людей: желание украсить свои жилища и одежду, рисовать картины окружающей жизни. Всё это способствовало формированию и накоплению геометрических сведений. За несколько столетий до нашей эры в Вавилоне, Китае, Египте и Греции уже существовали начальные геометрические знания, которые добывались в основном опытным путём, но они не были ещё систематизированы и передавались от поколения к поколению в виде правил и рецептов, например правил нахождения площадей фигур, объёмов тел, построения прямых углов и т. д. Не было ещё доказательств этих правил, и их изложение не представляло собой научной теории.

Первым, кто начал получать новые геометрические факты при помощи рассуждений (доказательств), был древнегреческий математик Фалес (VI в. до н. э.), который в своих исследованиях применял перегибание чертежа, поворот части фигуры и т. д., т. е. то, что на современном геометрическом языке называется движением.

Постепенно геометрия становится наукой, в которой большинство фактов устанавливается путём вывода, рассуждений, доказательств. Попытки греческих учёных привести геометрические факты в систему начинаются уже с V в. до н. э. Наибольшее влияние на всё последующее развитие геометрии оказали труды греческого учёного Евклида, жившего в Александрии в III в. до н. э. Сочинение Евклида «Начала» почти 2000 лет служило основной книгой, по которой изучали геометрию. В «Началах» были систематизированы известные к тому времени геометрические сведения и геометрия впервые предстала как математическая наука. Эта книга была переведена на языки многих народов мира, а сама геометрия, изложенная в ней, стала называться евклидовой геометрией.

Полезно подчеркнуть также, что в геометрии изучаются формы, размеры, взаимное расположение предметов независимо от их других свойств: массы, цвета и т. д. Отвлекаясь от этих свойств и беря во внимание только форму и размеры предметов, мы приходим к понятию геометрической фигуры. Геометрия не только даёт представление о фигурах, их свойствах, взаимном расположении, но и учит рассуждать, ставить вопросы, анализировать, делать выводы, т. е. логически мыслить.

В процессе беседы учитель может показать учащимся модели плоских и пространственных фигур и разъяснить различие между ними. Такие фигуры, как отрезок, луч, прямая, угол, окружность, круг, треугольник, прямоугольник, являются плоскими, т. е. целиком укладываются на плоскости. Раздел геометрии, изучающий свойства фигур на плоскости, называется планиметрией (от латинского слова «планум» — плоскость и греческого «метрео» — измеряю).

При изучении п. 1 нужно исходить из того, что учащиеся знакомы с понятиями точки и прямой, умеют их изображать, знают, как они могут быть расположены относительно друг друга. Полезно напомнить, что прямая безгранична, а на рисунке изображается только часть прямой. Следует обратить особое внимание на обозначение прямых малыми буквами латинского алфавита, так как раньше учащиеся обозначали прямую двумя большими буквами, соответствующими двум точкам, лежащим на прямой.

Вопрос о расположении точек относительно прямой отрабатывается при выполнении практического задания 1 учебника. Желательно, чтобы учащиеся усвоили, что на каждой прямой лежит сколько угодно (бесконечно много) точек и так же бесконечно много точек не лежит на данной прямой.

Переходя к утверждению «через любые две точки можно провести прямую, и притом только одну», нужно иметь в виду, что оно известно учащимся из предшествующего курса математики. Перед формулировкой этого утверждения можно предложить задание на проведение прямых через данную точку, поставив при этом вопросы: можно ли через данную точку провести прямую? Сколько прямых можно провести через данную точку? Учащиеся должны сделать вывод, что через данную точку можно провести сколько угодно прямых.

Далее можно предложить провести прямую через две данные точки и ответить на вопрос: сколько таких прямых можно провести? Получив ответ, полезно посоветовать учащимся найти в учебнике (п. 1) формулировку соответствующего утверждения и отметить, что оно выражает неискривлённость прямой, т. е. то свойство, которое отличает прямую от других линий (через две данные точки можно провести сколько угодно кривых линий, например окружностей, а прямых — только одну).

Различные случаи взаимного расположения двух прямых на плоскости желательно рассмотреть с помощью рисунков учебника, плакатов, а также используя мультимедийное оборудование. Очень важно обратить внимание учащихся на рассуждение, приводящее к выводу: две прямые не могут иметь более одной общей точки. Следует подчеркнуть, что логические рассуждения будут постоянно присутствовать при изучении геометрии. После этого учащиеся могут выполнить задания 2 и 3 и ответить на следующие вопросы:

1. Могут ли прямые OA и AB быть различными, если точка O лежит на прямой AB? (Прямые OA и AB не могут быть различными, так как обе они проходят через точки A и O, а через две точки проходит только одна прямая.)
2. Даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке C, и точка D, отличная от точки C и лежащая на прямой a. Может ли точка D лежать на прямой b? (Точка D не может лежать на прямой b, так как две прямые не могут иметь двух общих точек.)

Далее, используя рисунок 7 учебника, можно ввести понятие отрезка и предложить учащимся самостоятельно выполнить задание 5. Материал п. 2 «Провешивание прямой на местности» целесообразно изложить в виде беседы, а на одном из последних уроков учебного года, которые отводятся на повторение, можно провести практическую работу на местности.

Для проверки усвоения изученного материала полезно выполнить *самостоятельную работу*. Её следует проводить в форме диктанта.

Самостоятельная работа

1. Начертите прямую и обозначьте её буквой b.
   а) Отметьте точку M, лежащую на прямой b.
   б) Отметьте точку N, не лежащую на прямой b.
   в) Используя символы $\in$ и $\notin$, запишите предложение: «Точка M лежит на прямой b, а точка N не лежит на ней».

2. Начертите прямые a и b, пересекающиеся в точке M. На прямой a отметьте точку N, отличную от точки M.
   а) Являются ли прямые MN и a различными прямыми?
   б) Может ли прямая b проходить через точку N?
   Ответы обоснуйте.

Учащимся, проявляющим интерес к изучению геометрии, можно предложить следующие вопросы для самостоятельной работы:

1. Сколько точек пересечения могут иметь три прямые? Рассмотрите все возможные случаи и сделайте соответствующие рисунки.
2. На плоскости даны три точки. Сколько прямых можно провести через эти точки так, чтобы на каждой прямой лежали хотя бы две из данных точек? Рассмотрите все возможные случаи и сделайте рисунки.
3. Укажите все отрезки, изображённые на рисунке 1, с концами в обозначенных точках.

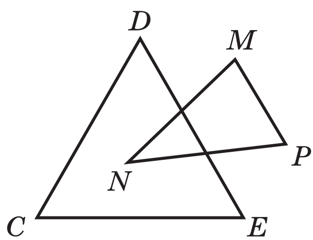

Рис. 1

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-1 из дидактических материалов.

Дома: пп. 1, 2; вопросы для повторения 1—3 (с. 25); практические задания 4, 6, 7.

На первых уроках, комментируя домашнее задание, следует показать учащимся на примерах вопросов 1—3 повторения, как находить на них ответы в тексте учебника.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны чётко и правильно отвечать на вопросы: сколько прямых можно провести через две точки? Сколько общих точек могут иметь две прямые? Они должны **уметь объяснить**, какая фигура называется отрезком; **уметь** обозначать точки, прямые и отрезки на рисунке, изображать возможные случаи взаимного расположения этих фигур.

§ 2 Луч и угол *(1 ч)*

Назначение параграфа — напомнить учащимся, что такое луч и угол, ввести на наглядном уровне понятия внутренней и внешней областей неразвёрнутого угла, познакомить с различными обозначениями лучей и углов.

К уроку полезно подготовить таблицу с изображением лучей и углов и шарнирную модель угла, изготовленную из деревянных реек или другого подходящего материала.

Понятие луча можно ввести в процессе выполнения под руководством учителя следующих заданий:

1. Проведите прямую a.
   а) Отметьте на ней точки A, B и C так, чтобы точка A лежала между точками B и C.
   б) Назовите лучи, исходящие из точки A.
   в) Отметьте на луче AB точку D.
2. Укажите все лучи, изображённые на рисунке 2:
   а) исходящие из точек M и D;
   б) составляющие вместе с их общим началом одну прямую.

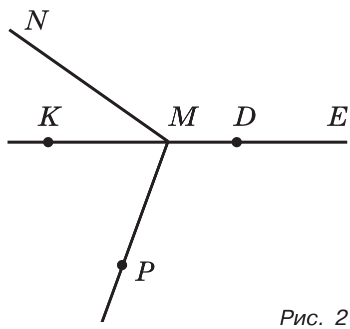

Рис. 2

Далее можно предложить учащимся самостоятельно выполнить практическое задание 8 и перейти к изложению п. 4 «Угол», используя при этом заготовленную шарнирную модель угла. На модели показывается, из каких элементов состоит данная фигура, потом даётся определение угла, вводятся различные способы его обозначения, понятия развёрнутого и неразвёрнутого углов, внутренней и внешней областей неразвёрнутого угла. Затем можно выполнить практические задания 9, 10, 11 и устно ответить на вопросы 5 и 6. После этого можно предложить учащимся начертить неразвёрнутый угол hk, заштриховать его внутреннюю область, провести луч l, исходящий из вершины и проходящий внутри этого угла, т. е. луч, разделяющий угол hk

на два угла. Полезно отметить, что если угол hk развёрнутый, то любой луч l, исходящий из его вершины и не совпадающий с лучами h и k, также делит этот угол на два угла — hl и lk. Завершить урок можно выполнением практического задания 14.

При наличии времени можно провести *самостоятельную работу* с вариантами С-2 из дидактических материалов.

Дома: пп. 3, 4; вопросы для повторения 4—6 (с. 25); практические задания 12, 13.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, что такое луч, **изображать** и **обозначать** лучи, **уметь объяснить,** какая геометрическая фигура называется углом, что такое стороны и вершина угла, **уметь обозначать** неразвёрнутые и развёрнутые углы, **показывать** на рисунке внутреннюю область неразвёрнутого угла, **проводить** луч, разделяющий угол на два угла.

§ 3 Сравнение отрезков и углов *(1 ч)*

Назначение параграфа — ввести одно из важнейших геометрических понятий — понятие равенства фигур, в частности равенства отрезков и углов, научить учащихся сравнивать отрезки и углы, ввести понятия середины отрезка и биссектрисы угла.

Понятие равенства геометрических фигур вводится на основе понятия наложения. Разумеется, учащиеся 7 класса должны воспринимать это понятие так, как мы его наглядно представляем, а не как отображение плоскости на себя, свойства которого выражены в аксиомах. Поэтому при введении понятия равенства фигур желательно использовать модели различных плоских фигур (знакомых учащимся из курса математики 1—6 классов), для которых можно установить равенство непосредственным наложением одной фигуры на другую, а также плакат с фигурами $Ф_1$ и $Ф_2$, аналогичный рисунку 19 учебника, и кальку, с помощью которой учитель может показать процесс наложения одной фигуры на другую, описанный в учебнике.

При изучении п. 5 следует обратить внимание учащихся на то, что задача сравнения фигур (их форм и размеров) является одной из основных задач в геометрии. На практике сравнить наложением две небольшие плоские фигуры вполне возможно, а вот два очень больших стекла, а тем более два земельных участка практически невозможно. Это приводит к необходимости иметь какие-то правила сравнения двух фигур, позволяющие сравнить некоторые их размеры и по результатам этого сравнения сделать вывод о равенстве или неравенстве фигур.

Полезно предложить учащимся сравнить несколько отрезков, изображённых на доске, среди которых есть равные (с помощью кальки, бечёвки или циркуля). Затем ввести понятие середины отрезка и решить задачи 19, 20.

При сравнении углов полезно использовать транспаранты. На двух плёнках изображаются углы и с помощью мультимедийного оборудования показывается, как равные углы можно совместить наложением. Выполнение заданий 21 и 22 позволяет лучше усвоить понятия «больше», «меньше», «равно» для углов, а также понятие биссектрисы угла.

Для проверки усвоения нового материала можно провести *самостоятельную работу* (в форме диктанта).

Самостоятельная работа

1. На луче h с началом в точке O отложите отрезки OA и OB так, чтобы точка A лежала между точками O и B. Сравните отрезки OA и OB и запишите результат сравнения.
2. Начертите неразвёрнутый угол ABC и проведите какой-нибудь луч BD, делящий этот угол на два угла. Сравните углы ABC и ABD, ABC и DBC и запишите результаты сравнения.

При наличии времени проверку работы можно провести на этом же уроке с помощью мультимедийного оборудования.

В зависимости от уровня подготовки класса можно использовать те или иные варианты самостоятельной работы С-3 из дидактических материалов, входящих в данный учебно-методический комплект.

Дома: пп. 5, 6; вопросы для повторения 7—11 (с. 25); задачи 18, 23.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить,** какие геометрические фигуры называются равными, какая точка называется серединой отрезка, какой луч называется биссектрисой угла; **уметь сравнивать** отрезки и углы и **записывать** результат сравнения, **отмечать** с помощью масштабной линейки середину отрезка, с помощью транспортира **проводить** биссектрису угла.

§ 4 Измерение отрезков *(2 ч)*

Назначение параграфа — ознакомить учащихся с процедурой измерения отрезков, ввести понятие длины отрезка и рассмотреть свойства длин отрезков, ознакомить учащихся с различными единицами измерения и инструментами для измерения отрезков.

Приступая к изучению параграфа, полезно напомнить учащимся, что в повседневной жизни нам часто приходится сталкиваться с измерением длин, высот, расстояний. С точки зрения геометрии мы имеем в таких случаях дело с измерением отрезков. После этого можно рассказать о процедуре измерения отрезков.

Необходимо, чтобы у учащихся сформировалось чёткое представление о том, что при выбранной единице измерения каждому отрезку соответствует определённое положительное число, которое и выражает длину отрезка. Это число показывает, сколько единиц измерения и её частей укладывается в измеряемом отрезке.

Затем полезно напомнить учащимся известные им единицы измерения отрезков, подчеркнув при этом, что единица измерения, в частности миллиметр, сантиметр или метр, есть некоторый отрезок.

Решив устно задание 26, можно далее выполнить задание 27 и записать решение в тетрадь.

Возможное оформление решения задачи

$OC = 2AB$, $ON = \frac{1}{2}AB$, $OK = \frac{1}{4}AB$ (рис. 3).

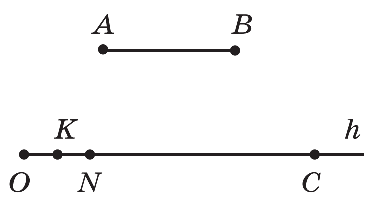

Рис. 3

Затем можно решить задачи 30 и 31 (б).

Для закрепления изученного материала полезно выполнить следующие задания с необходимыми краткими записями на доске и в тетрадях учащихся:

1. Дан луч h с началом в точке O, $B \in h$, $A \in h$, $O — B — A$ (эта запись означает, что точка B лежит между точками

O и A). а) Какой из отрезков — OB или OA — имеет бо́льшую длину? б) Найдите длину отрезка AB, если $OA = 72$ см, $OB = 4{,}2$ дм.

2. Начертите прямую a и отметьте точку A, не лежащую на этой прямой. С помощью масштабной линейки и циркуля отметьте на прямой a точку M, удалённую от точки A на расстояние 3 см. (Следует обратить внимание учащихся на то, что задача может иметь одно или два решения, а может и не иметь решений.)
3. Задание 29 учебника.
4. Начертите отрезок CD, равный 5 см. С помощью масштабной линейки отметьте на прямой CD точку M, такую, что $CM = 2$ см. а) Сколько таких точек можно отметить на прямой CD? б) Какова длина отрезка MD? Рассмотрите все возможные случаи.

После выполнения этих заданий полезно решить задачу 32 учебника.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $A \in a$, $B \in a$, $C \in a$, $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см.
Найти: AC.

Решение. На прямой a отложим отрезок AB, а затем отрезок BC. Возможны два случая.

а) Точки A и C лежат по разные стороны от точки B (сделать рисунок). В этом случае

$$AC = AB + BC = 12 \text{ см} + 13{,}5 \text{ см} = 25{,}5 \text{ см}.$$

б) Точки A и C лежат по одну сторону от точки B (сделать рисунок). В этом случае

$$AC = BC - AB = 13{,}5 \text{ см} - 12 \text{ см} = 1{,}5 \text{ см}.$$

Ответ: $AC = 25{,}5$ см или $AC = 1{,}5$ см.

Далее можно провести беседу с учащимися о единицах измерения и измерительных инструментах, применяемых на практике, используя при этом п. 8 учебника и те факты, которые известны учащимся из опыта.

Задачу 36 учащимся полезно решить самостоятельно, а тем, у кого она вызовет затруднения, можно предложить воспользоваться решением, приведённым в учебнике. В классе также желательно рассмотреть задачи 34 и 38.

В плане индивидуальной работы с учащимися, проявляющими интерес к изучению геометрии, можно использовать задачи 39, 40, а всему классу можно предложить практические задания 24, 25, 28 и задачу 35.

Проверку усвоения свойств длин отрезков можно осуществить с помощью следующей *самостоятельной работы*.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. На прямой b отмечены точки C, D и E так, что $CD = 6$ см, $DE = 8$ см. Какой может быть длина отрезка CE? ($CE = 14$ см или $CE = 2$ см.)
2. Точка M — середина отрезка AB, $MB = 4{,}3$ дм. Найдите длину отрезка AB в миллиметрах.

Вариант II

1. На прямой M отмечены точки A, B и C так, что $AC = 12$ см, $AB = 8$ см. Какой может быть длина отрезка BC? ($BC = 20$ см или $BC = 4$ см.)
2. Точка P — середина отрезка MN. Найдите длину отрезка PN в метрах, если $MN = 14$ дм.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Даны отрезок CD и точка M, причём $CD = 17$ см, $CM = 13$ см, $DM = 5$ см. Лежит ли точка M на отрезке CD?
2. На прямой b отмечены последовательно точки C, D, E и F так, что $CD = EF$. Расстояние между серединами отрезков CD и EF равно 12,4 см. Найдите расстояние между точками C и E.

В случае недостатка времени вместо данной самостоятельной работы и самостоятельной работы при изучении следующего параграфа можно провести единую самостоятельную работу с вариантами С-4 из дидактических материалов.

Дома: пп. 7, 8; вопросы для повторения 12—13 (с. 25); задачи 31 (а), 33, 37.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь рассказать** о процедуре (алгоритме) измерения отрезков, позволяющей сделать вывод: выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом; **уметь аргументировать** утверждения о свойствах длин отрезков; **уметь решать задачи** типа 30—33, 35, 37.

§ 5 Измерение углов *(1 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятие градусной меры угла и рассмотреть свойства градусных мер углов: ввести понятия острого, прямого и тупого углов; ознакомить учащихся с приборами для измерения углов на местности.

На уроке желательно иметь демонстрационный транспортир.

Учителю нужно иметь в виду, что учащиеся уже знакомы с измерением углов с помощью транспортира и поэтому желательно опираться на имеющийся у них опыт. Следует подчеркнуть, что измерение углов проводится аналогично измерению отрезков. Эта аналогия должна быть показана учащимся, при этом нужно отметить, что в отличие от длины отрезка, которая может выражаться как угодно большим числом, градусная мера угла не превосходит 180°.

После выполнения практических заданий 41, 42 можно решить задачи 45, 46, 47 (а), 48 на свойства градусных мер углов.

Решения задач 47 (а) и 48 полезно записать на доске и в тетрадях учащихся.

Возможное оформление решения задач

47. а) $\angle AOB = \angle AOE + \angle EOB$ (сделать чертёж),

$\angle AOB = 44^\circ + 77^\circ = 121^\circ$.

48. По условию задачи $\angle AOB = \angle AOC + \angle BOC = 78^\circ$, $\angle AOC = \angle BOC - 18^\circ$ (сделать чертёж). Отсюда следует: $\angle BOC - 18^\circ + \angle BOC = 78^\circ$; $\angle BOC = 96^\circ \cdot \frac{1}{2} = 48^\circ$.

Понятия прямого, острого и тупого углов можно ввести с помощью плакатов или мультимедийного оборудования и закрепить усвоение этих понятий при решении задач 51, 52, 53.

Об измерении углов на местности учитель может рассказать, используя п. 10 учебника, а на одном из последних уроков учебного года, которые отводятся на повторение, можно провести практическую работу по измерению углов на местности.

Для усвоения свойств градусных мер углов полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Луч BD делит развёрнутый угол ABC на два угла, один из которых на 34° больше другого. Найдите образовавшиеся углы.
2. Луч BD делит прямой угол ABC на два угла, один из которых в 4 раза меньше другого. Найдите образовавшиеся углы.

Вариант II

1. Луч *BD* делит развёрнутый угол *ABC* на два угла, разность которых равна 46°. Найдите образовавшиеся углы.
2. Луч *BD* делит прямой угол *ABC* на два угла, градусные меры которых относятся как 5 : 4. Найдите угол между лучом *BD* и биссектрисой угла *ABC*.

Дома: пп. 9—10; вопросы для повторения 14—16 (с. 25—26); практическое задание 44; задачи 47 (б), 49, 50.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь** провести аналогию между измерением отрезков и измерением углов, отмечая определённое различие этих процедур; **уметь объяснить**, что такое градус, минута, секунда и градусная мера угла; записывать градусные меры углов; аргументировать утверждения о свойствах градусных мер углов; **уметь** чётко формулировать ответы на вопросы: какой угол называется прямым? острым? тупым? **Уметь решать задачи** типа 47—50.

§ 6 Перпендикулярные прямые *(2 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия смежных и вертикальных углов, рассмотреть их свойства; ввести понятие перпендикулярных прямых; показать, как применяются эти понятия при решении задач.

Понятие смежных углов и их свойство (сумма смежных углов равна 180°) целесообразно рассмотреть с помощью плаката или мультимедийного оборудования. Затем можно выполнить задание 55 и решить задачи 58, 59, 61 (б, г), 62, 63.

Понятие вертикальных углов можно ввести, выполняя следующие задания:

1. Начертите неразвёрнутый угол *AOB* и назовите лучи, являющиеся сторонами этого угла.
2. Проведите луч *OC*, являющийся продолжением луча *OA*, и луч *OD*, являющийся продолжением луча *OB*.
3. Запишите в тетради: углы *AOB* и *COD* называются вертикальными.

Далее на рисунке или плакате можно показать, что при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов с вершиной в точке пересечения этих прямых.

Обоснование того факта, что вертикальные углы равны, вначале можно провести на конкретном примере, записав его на доске и в тетрадях учащихся.

Задача. На рисунке 4 прямые AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle AOD = 35°$. Найдите углы AOC и BOC.

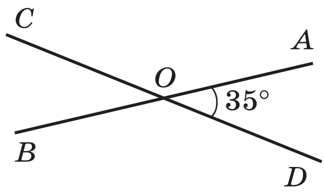

Рис. 4

Решение. 1. Углы AOD и AOC смежные, поэтому $\angle AOC = 180° - 35° = 145°$.

2. Углы AOC и BOC также смежные, поэтому $\angle BOC = 180° - 145° = 35°$.

Итак, $\angle BOC = \angle AOD = 35°$, причём эти углы являются вертикальными. Теперь можно задать вопрос: верно ли утверждение, что любые вертикальные углы равны?

Можно предложить учащимся самостоятельно доказать утверждение о свойстве вертикальных углов и записать доказательство в тетрадь.

На усвоение свойства вертикальных углов в классе можно решить задачи 65 (а), 66 (б, в). Более сильным учащимся целесообразно предложить задачи 67 и 68. Для работы с остальными учащимися можно использовать задачи 54, 64.

Проверку усвоения свойств смежных и вертикальных углов можно провести с помощью *самостоятельной работы*.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Один из смежных углов на 27° меньше другого. Найдите оба смежных угла.
2. Найдите все неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если сумма двух из них равна 226°.

Вариант II

1. Один из смежных углов в 9 раз больше другого. Найдите оба смежных угла.
2. Найдите все неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если один из них на 81° больше другого.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Найдите смежные углы, если их градусные меры относятся как 2 : 7.
2. Найдите все неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна 71°.

При недостатке времени вместо этой самостоятельной работы можно провести на втором уроке по данной теме самостоятельную работу с вариантами С-5 из дидактических материалов.

Понятие перпендикулярных прямых можно ввести с помощью заранее заготовленного плаката по рисунку 42 учебника.

Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно, используя свойства вертикальных и смежных углов, обосновали тот факт, что если при пересечении двух прямых один из образовавшихся углов прямой, то остальные углы также прямые.

Для закрепления понятия перпендикулярных прямых в классе рекомендуется выполнить практическое задание 57.

Целесообразно, чтобы учитель сам провёл обоснование (доказательство) утверждения о том, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются. В процессе рассуждения полезно использовать рисунок 43 (б, в) учебника, выполненный на картоне, а также на прикреплённой поверх картона кальке, которую можно перегнуть по прямой PQ так, что лучи PA и QB наложатся на лучи PA_1 и QB_1. В доказательстве данного утверждения используется метод рассуждения от противного, однако заострять на этом внимание учащихся пока преждевременно. Более сильным учащимся можно предложить вопрос: могут ли прямые AA_1 и BB_1, перпендикулярные к данной прямой, пересечься в некоторой точке этой прямой (рис. 5)?

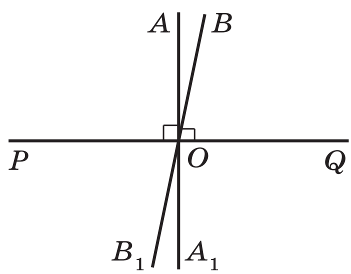

Рис. 5

Затем полезно устно решить задачи 69 и 70.

Завершить тему можно беседой о построении прямых углов на местности (п. 13) с демонстрацией изготовленного учащимися экера.

Дома: пп. 11—13; вопросы для повторения 17—21 (с. 26); задание 56; задачи 60, 61 (а, в, д), 65 (б), 66 (а).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны давать чёткие и правильные ответы на вопросы: какие углы называются смежными? Какие углы называются вертикальными? Учащиеся должны **уметь** изображать и находить на рисунке смежные и вертикальные углы, формулировать и обосновывать утверждения о свойствах смежных и вертикальных углов, акцентируя внимание на тех уже известных фактах, которые используются при обосновании этих утверждений; **уметь формулировать** понятие перпендикулярных прямых и обосновывать утверждение о том, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются; **уметь решать задачи** типа 57, 58, 61, 64, 65, 69.

Решение задач *(1 ч)*

Назначение этого урока — повторить пройденный материал, подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе. При проведении урока можно использовать дополнительные задачи к главе: 74, 76 (б), 77, 81, 82 (б), 84.

Дома: задания 75, 76 (а), 78, 80, 82 (а).

Для индивидуальной работы с сильными учащимися можно использовать задачи 79, 85, 86, остальным полезно выполнить задания 71—73.

Контрольная работа № 1 *(1 ч)*

Вариант I

1. Три точки B, C и D лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 17$ см, $DC = 25$ см. Какой может быть длина отрезка BC?
2. Сумма вертикальных углов MOE и DOC, образованных при пересечении прямых MC и DE, равна $204°$. Найдите угол MOD.
3. С помощью транспортира начертите угол, равный $78°$, и проведите биссектрису смежного с ним угла.

Вариант II

1. Три точки M, N и K лежат на одной прямой. Известно, что $MN = 15$ см, $NK = 18$ см. Каким может быть расстояние MK?
2. Сумма вертикальных углов AOB и COD, образованных при пересечении прямых AD и BC, равна $108°$. Найдите угол BOD.
3. С помощью транспортира начертите угол, равный $132°$, и проведите биссектрису одного из смежных с ним углов.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. Лежат ли точки M, N и P на одной прямой, если $MP = 12$ см, $MN = 5$ см, $PN = 8$ см?
2. Найдите все неразвёрнутые углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна $37°$.

3. На рисунке 6 $AB \perp CD$, луч OE — биссектриса угла AOD. Найдите угол COE.

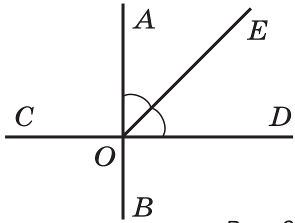

Рис. 6

Вместо этих вариантов можно использовать варианты контрольной работы К-1 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Какая точка называется серединой отрезка?
2. Отметьте точку C на прямой AB так, чтобы точка B оказалась серединой отрезка AC.
3. Отрезок длиной 18 см разделён точкой на два неравных отрезка. Чему равно расстояние между серединами этих отрезков?

Вариант II

1. Какой луч называется биссектрисой угла?
2. Начертите угол BAC, а затем с помощью транспортира и линейки проведите луч AD так, чтобы луч AB оказался биссектрисой угла CAD. Всегда ли это выполнимо?
3. Чему равна градусная мера угла, образованного биссектрисами двух смежных углов?

Вариант III

1. Какие углы называются смежными? Чему равна сумма смежных углов? Могут ли быть смежными прямой и острый углы?
2. Начертите угол, смежный с данным углом. Сколько таких углов можно начертить?
3. Градусные меры двух смежных углов относятся как 3 : 7. Найдите эти углы.

Вариант IV

1. Какие углы называются вертикальными? Каким свойством обладают вертикальные углы? Сколько пар вертикальных углов образуется при пересечении двух прямых?

2. Начертите прямые AB, CD и MK, пересекающиеся в точке O. Назовите пары получившихся вертикальных углов.
3. При пересечении двух прямых образовались четыре неразвёрнутых угла. Найдите эти углы, если сумма трёх углов равна $290°$.

Вариант V

1. Какие прямые называются перпендикулярными? Каким свойством обладают две прямые, перпендикулярные к третьей?
2. Начертите прямую a и отметьте точку M, не лежащую на ней. С помощью чертёжного угольника проведите через точку M прямую, перпендикулярную к прямой a.
3. Начертите тупой угол ABC и отметьте точку D вне его. С помощью чертёжного угольника через точку D проведите прямые, перпендикулярные к прямым AB и BC.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы I

Во многих задачах главы I учащимся достаточно выполнить правильный чертёж и по чертежу кратко записать решение. Ниже приведено возможное оформление решений задач 34, 38, 39, 40.

34. Дано: точка C — середина AB, $AB = 64$ см, D — точка луча CA, $CD = 15$ см (рис. 7).

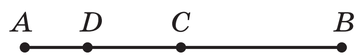

Рис. 7

Найти: BD и DA.

Решение. $AC = CB = 64$ см : $2 = 32$ см.

$BD = BC + CD = 32$ см $+15$ см $= 47$ см.

$AD = AC - DC = 32$ см $- 15$ см $= 17$ см.

38. Дано: точки O, A и B лежат на одной прямой, $OA = 12$ см, $OB = 9$ см.

Найти: MN, где M — середина OA, N — середина OB.

Решение. $OM = \frac{1}{2}OA = 6$ см, $ON = \frac{1}{2}OB = 4{,}5$ см.

а) Точка O лежит на отрезке AB (рис. 8, *а*).

Тогда $MN = MO + ON = 6$ см $+ 4{,}5$ см $= 10{,}5$ см.

б) Точка O не лежит на отрезке AB (рис. 8, *б*).

Тогда $MN = OM - ON = 6$ см $- 4{,}5$ см $= 1{,}5$ см.

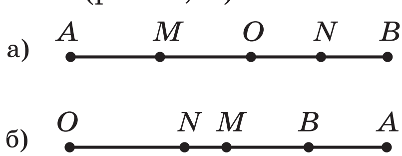

Рис. 8

39. Дано: отрезок AB, O — точка на этом отрезке, $AB = a$.

Найти: MN, где M — середина AO, N — середина OB (рис. 9).

Рис. 9

Решение. $MO = \frac{1}{2}AO$, $NO = \frac{1}{2}OB$, $MN = MO + ON =$ $= \frac{1}{2}(AO + OB) = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}a$.

40. Дано: $AB = 28$ см, точки C и D лежат на отрезке AB (рис. 10), M — середина AC, N — середина DB, $MN = 16$ см.

Рис. 10

Найти: CD.

Решение.

$$AB = AC + CD + DB = 2MC + CD + 2DN = 28 \text{ (см)}. \quad (1)$$

$$MN = MC + CD + DN = 16 \text{ (см)},$$

поэтому

$$2MC + 2CD + 2DN = 32 \text{ (см)}. \quad (2)$$

Вычитая из равенства (2) равенство (1), получаем $CD = 32$ см $-$ 28 см $= 4$ см.

Приведём также краткие решения некоторых других задач этой главы.

65. а) При пересечении двух прямых образуются четыре неразвёрнутых угла. Так как сумма двух из них равна $114°$, то эти два угла не могут быть смежными. Следовательно, эти углы вертикальные, и поэтому каждый из них равен $57°$. Каждый из оставшихся двух углов является смежным с одним из этих углов и поэтому равен $180° - 57° = 123°$.

б) При пересечении двух прямых образуются четыре неразвёрнутых угла. Обозначим их 1, 2, 3, 4 (рис. 41 учебника). Пусть, например, $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 220°$. Так как $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, то $\angle 3 = 220° - 180° = 40°$. Таким образом, $\angle 1 = \angle 3 = 40°$, $\angle 2 = \angle 4 = 140°$.

70. Пусть AB, AC и AD — три прямые, пересекающие прямую a соответственно в точках B, C, D. Допустим, что две из этих прямых, например AB и AC, перпендикулярны к прямой a. Но тогда получается, что две прямые AB и AC, перпендикулярные к третьей, пересекаются в точке A, что невозможно. Следовательно, из трёх прямых AB, AC и AD лишь одна может быть перпендикулярна к прямой a, и, значит, по крайней мере, две из них не перпендикулярны к прямой a.

79*. Возможны два случая:

а) Точки B и C лежат по разные стороны от точки A (рис. 11, *а*). Тогда $MN = MA + AN = \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BC$, т. е. $BC = 2MN$.

б) Точки B и C лежат по одну сторону от точки A. Пусть, например, точка B лежит на отрезке AC (рис. 11, *б*). Тогда $MN = AN - AM = \frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}BC$, т. е. $BC = 2MN$.

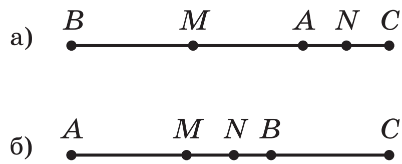

Рис. 11

84. Пусть AOB и A_1OB_1 — вертикальные углы, луч OM — биссектриса угла AOB, а OM_1 — продолжение луча OM. Докажем, что луч OM_1 — биссектриса угла A_1OB_1, т. е. $\angle 3 = \angle 4$ (рис. 12). Углы 1 и 3, а также углы 2 и 4 вертикальные, поэтому $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$. Но $\angle 1 = \angle 2$, так как OM — биссектриса угла AOB, поэтому $\angle 3 = \angle 4$.

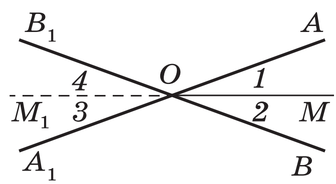

Рис. 12

85*. Задача будет решена, если мы докажем, что угол ABD развёрнутый. Предположим, что это не так. Пусть BM — биссектриса угла ABC, а BN — биссектриса угла CBD. Возможны два случая:

а) Луч BC проходит внутри угла ABD (рис. 13, *а*). Тогда $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = \angle ABD < 180°$, но $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle MBN = \angle 2 + \angle 3 < 90°$, что противоречит условию задачи.

б) Луч BC лежит во внешней области угла ABD (рис. 13, *б*). В этом случае $\angle ABC + \angle CBD > 180°$, поэтому $(\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) > 180°$.

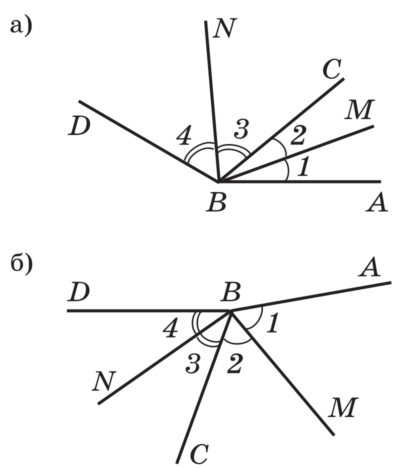

Рис. 13

Но $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, поэтому $\angle MBN = \angle 2 + \angle 3 > 90°$. Это неравенство также противоречит условию задачи.

Таким образом, угол ABD развёрнутый, т. е. точки A, B и D лежат на одной прямой.

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы I

Согласно первому варианту тематического планирования учебного материала геометрия в 7 классе изучается во II, III и IV четвертях по 2 часа в неделю, всего 50 часов в течение учебного года. На изучение темы «Начальные геометрические сведения» отводится 7 часов, которые можно распределить следующим образом:

§ 1. Прямая и отрезок. § 2. Луч и угол	1 ч
§ 3. Сравнение отрезков и углов	1 ч
§ 4. Измерение отрезков. § 5. Измерение углов	2 ч
§ 6. Перпендикулярные прямые	1 ч
Решение задач	1 ч
Контрольная работа №1	1 ч

При проведении уроков целесообразно использовать рекомендации, данные выше. Основные понятия следует вводить на наглядно-интуитивной основе с учётом опыта учащихся, накопленного в предыдущие годы обучения. Учитывая жёсткий лимит учебного времени, объяснение материала и фронтальное решение задач полезно проводить по готовым чертежам (настенным таблицам, диапозитивам) или с помощью мультимедийного оборудования.

В связи с сокращением числа часов, отводимых на изучение того или иного параграфа, учителю следует по своему усмотрению отобрать задачи из числа рекомендованных выше для решения в классе и домашних заданий. На уроке, который отводится на решение задач по всей теме, целесообразно повторить изученный материал. Для проведения контрольной работы № 1 можно использовать варианты, предложенные выше.

ГЛАВА

II Треугольники *(17 ч)*

Во второй главе изучаются признаки равенства треугольников, которые являются основным рабочим аппаратом всего курса геометрии. Доказательства большей части теорем курса строятся по схеме: поиск равных треугольников — доказательство их равенства — следствия, вытекающие из равенства треугольников. Признаки равенства треугольников открывают широкие возможности для решения задач и, таким образом, позволяют накапливать опыт доказательных рассуждений. Доказательства теорем о первом и втором признаках состоят в том, что один треугольник совмещается с другим путём наложения, а это означает, что треугольники равны по определению равенства фигур. Этот приём нагляден, понятен учащимся, вполне соответствует их представлениям о равенстве фигур.

На начальном этапе изучения признаков равенства треугольников полезно больше внимания уделять решению задач по готовым чертежам, используя рабочую тетрадь. В дальнейшем при решении задач данной главы нужно нацеливать учащихся на самостоятельное выполнение рисунка по условию задачи, что во многих случаях помогает быстрее найти и применить подходящий признак равенства треугольников.

Второй важный момент данной главы — введение нового класса задач на построение с помощью циркуля и линейки.

Примерное поурочное планирование

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Первый признак равенства треугольников	3	50—59	С-7
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	3	60—70	С-8
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	4	71—76	С-9, С-10
§ 4. Задачи на построение	3	77—83	С-11, С-12
Решение задач	3	50—83	—
Контрольная работа № 2	1	—	К-2

§ 1 Первый признак равенства треугольников *(3 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия треугольника и его элементов, понятия теоремы и доказательства теоремы; доказать теорему о первом признаке равенства треугольников.

Понятие треугольника знакомо учащимся, поэтому изучение темы можно начать с демонстрации различных многоугольников, изготовленных из проволоки либо изображённых на плакате или классной доске. Среди них учащиеся выделяют треугольники, указывают и называют их стороны, вершины и углы. Учащиеся должны знать, что в треугольнике ABC сторона BC и угол A являются противолежащими друг другу (можно сказать и так: сторона BC является противоположной вершине A), углы B и C прилежат к стороне BC, угол A заключён между сторонами AC и AB и т. д.

В связи с этим полезно выполнить следующее практическое задание:

1. Начертите треугольник ABC и проведите отрезок, соединяющий вершину A с серединой противоположной стороны.
2. Начертите треугольник MNP. На стороне MP отметьте произвольную точку K и соедините её с вершиной, противолежащей стороне MP.
3. Назовите углы: а) треугольника DEK, прилежащие к стороне EK; б) треугольника MNP, прилежащие к стороне MN.
4. Назовите угол: а) треугольника DEK, заключённый между сторонами DE и DK; б) треугольника MNP, заключённый между сторонами NP и PM.
5. Между какими сторонами: а) треугольника DEK заключён угол K; б) треугольника MNP заключён угол N?

Для лучшего усвоения понятий треугольника и его элементов желательно выполнить задания 87 и 88. Затем можно ввести понятие периметра треугольника и решить задачу 91 с оформлением на доске и в тетрадях учащихся.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $P_{ABC} = 48$ см, $AC = 18$ см, $BC - AB = 4{,}6$ см.
Найти: AB и BC.

Решение. Обозначим длину стороны AB в сантиметрах буквой x, тогда $BC = (x + 4{,}6)$ см; 48 см $= AB + AC + BC =$ $= (x + x + 4{,}6 + 18)$ см, откуда $2x = 25{,}4$, $x = 12{,}7$.

Итак, $AB = 12{,}7$ см, $BC = (12{,}7 + 4{,}6)$ см $= 17{,}3$ см.

Ответ: 12,7 см и 17,3 см.

Далее целесообразно напомнить учащимся, какие фигуры называются равными, и обратить внимание на то, что из равенства треугольников следует равенство соответствующих, т. е. совмещающихся при наложении, сторон и углов этих треугольников и что в равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы, и обратно, против соответственно равных углов лежат равные стороны. В связи с этим полезно предложить учащимся выполнить следующее задание:

На каждом из рисунков 14 и 15 изображены равные между собой треугольники. Укажите соответственно равные элементы этих треугольников.

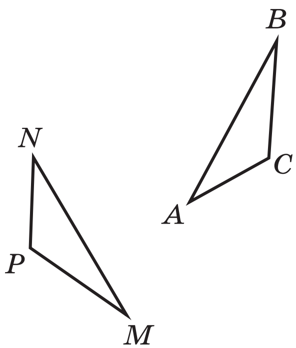

Рис. 14

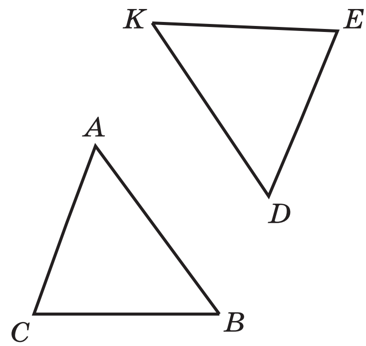

Рис. 15

Далее можно устно решить задачу 92 и следующую задачу:

Треугольники ABC и MNP равны, причём $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle N$ и $\angle C = \angle P$. Найдите стороны треугольника MNP, если $AB = 7$ см, $BC = 5$ см, $CA = 3$ см.

Р е ш е н и е. $\triangle ABC = \triangle MNP$ по условию, поэтому углы и стороны треугольника ABC соответственно равны углам и сторонам треугольника MNP. Из условия задачи следует, что соответственно равными являются стороны AB и MN, BC и NP, CA и PM. Таким образом, $MN = 7$ см, $NP = 5$ см, $PM = 3$ см.

Изучение первого признака равенства треугольников следует начать с разъяснения смысла слов «теорема» и «доказательство теоремы», поскольку с этими понятиями учащиеся встречаются впервые. Нужно отметить, что в геометрии каждое утверждение, справедливость которого устанавливается путём рассуждений, называется теоремой, а сами рассуждения называются доказательством теоремы. Полезно напомнить примеры рассуждений, проведённых ранее, и сказать, что это были доказательства теорем, хотя мы их ещё так не называли. Сюда относятся утверждение (теорема) о равенстве вертикальных углов, утверждение (теорема) о свойстве двух прямых, перпендикулярных к третьей прямой.

Перед тем как сформулировать теорему о первом признаке равенства треугольников, желательно повторить с учащимися понятие равенства фигур (отрезков, углов, треугольников), используя при этом плакаты, модели, мультимедийное оборудование, и выполнить задание 89 (а). Затем учителю следует сформулировать и доказать теорему, выражающую первый признак равенства треугольников. После доказательства нужно разъяснить смысл слова «признак», отметив, что доказанная теорема даёт возможность устанавливать равенство двух треугольников, не производя фактического наложения одного из них на другой, а сравнивая только некоторые элементы треугольников.

На начальном этапе применения первого признака равенства треугольников желательно рассмотреть как можно больше задач, решаемых по готовым чертежам. При этом полезно приучать учащихся отмечать на чертеже соответственно равные элементы и делать содержательные ссылки на признаки («треугольники равны по двум сторонам и углу между ними»), а не формальные («треугольники равны по первому признаку»). В классе рекомендуется решить задачи 93 (а, б), 94, 96, 98. Проверить умение учащихся применять изученный признак при решении задач можно с помощью *самостоятельной работы* (III и IV варианты предназначены для более подготовленных учащихся).

Самостоятельная работа

Вариант I

Докажите равенство треугольников ADC и ABC, изображённых на рисунке 16, если $AD = AB$ и $\angle 1 = \angle 2$. Найдите углы ADC и ACD, если $\angle ACB = 38°$, $\angle ABC = 102°$.

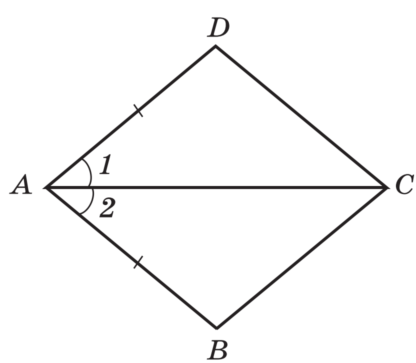

Рис. 16

Вариант II

Докажите равенство треугольников ABC и ADC, изображённых на рисунке 53 учебника, если $BC = AD$ и $\angle 1 = \angle 2$. Найдите углы ACD и ADC, если $\angle ABC = 108°$, $\angle BAC = 32°$.

Вариант III

Известно, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, причём $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $CD = C_1D_1$. Докажите, что $\triangle CBD = \triangle C_1B_1D_1$.

Вариант IV

Известно, что $\triangle MKP = \triangle M_1K_1P_1$, причём $\angle M = \angle M_1$, $\angle K = \angle K_1$. На сторонах MP и M_1P_1 отмечены точки E и E_1 так, что $ME = M_1E_1$. Докажите, что $\triangle MEK = \triangle M_1E_1K_1$.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-7 из дидактических материалов.

Дома: пп. 14, 15; вопросы для повторения 1—4 (с. 48); практическое задание 89 (б, в); задачи 90, 95, 97, 99.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какая фигура называется треугольником, что такое вершины, стороны, углы и периметр треугольника, называть (и показывать на рисунке) для данной стороны треугольника противолежащий и прилежащие к ней углы; **уметь объяснить**, какие треугольники называются равными, **формулировать и доказывать** теорему о первом признаке равенства треугольников; объяснить смысл слова «признак»; **уметь решать задачи** типа 90, 92—95, 97, осуществляя в задачах по готовым рисункам поиск и выделение необходимой информации.

§ 2 Медианы, биссектрисы и высоты треугольника *(3 ч)*

Назначение параграфа состоит в том, чтобы ввести понятие перпендикуляра к прямой и доказать теорему о перпендикуляре; ввести понятия медианы, биссектрисы и высоты треугольника и рассмотреть свойства равнобедренного треугольника.

Понятие перпендикуляра к прямой вводится в учебнике конструктивно. Желательно, чтобы учащиеся уяснили, что перпендикуляр AH, проведённый из точки A к прямой a, — это такой отрезок, для которого выполнены следующие два условия:

1) прямая AH перпендикулярна к прямой A ($AH \perp a$);
2) $A \notin a$, $H \in a$.

Перед формулировкой и доказательством теоремы о перпендикуляре к прямой полезно выполнить практическое задание 100.

Доказательство теоремы о перпендикуляре учителю следует провести самому. При этом нужно иметь в виду, что единственность перпендикуляра (вторая часть теоремы) доказывается фактически методом от противного, однако, как и в главе I, не следует заострять на этом внимание учащихся. Суть метода будет разъяснена позже, в главе III.

После доказательства теоремы можно решить задачу 105, в которой используется понятие перпендикуляра к прямой, а в ходе решения «работает» первый признак равенства треугольников.

С понятиями медианы, биссектрисы и высоты треугольника учащиеся встречаются впервые, поэтому полезно выполнить практические задания 101, 102, 103, в которых предлагается построить указанные отрезки с помощью масштабной линейки, транспортира и чертёжного угольника.

Следует обратить внимание учащихся на различие между биссектрисой угла (луч, делящий угол на два равных угла) и биссектрисой треугольника (отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны).

У некоторых учащихся вызывает затруднение проведение высоты из вершины острого угла в тупоугольном треугольнике, поэтому при выполнении задания 103 в классе желательно разобрать случай тупоугольного треугольника, а на дом можно дать ту часть задания, которая связана с остроугольным треугольником.

Понятия равнобедренного и равностороннего треугольников знакомы учащимся. Однако при решении задач и доказательстве теорем требуется достаточно быстро указывать боковые стороны, основание, углы при основании, угол, противолежащий основанию равнобедренного треугольника. С целью отработки этих навыков можно предложить учащимся задания:

1. Дан равнобедренный треугольник CDE с основанием DE. Назовите боковые стороны, углы при основании и угол, противолежащий основанию этого треугольника.
2. В равнобедренном треугольнике MDK $KM = KD$. Назовите боковые стороны, основание, угол, противолежащий основанию, и углы при основании этого треугольника.

После этого можно решить задачи 108, 109 и 110.

Возможное оформление решения задачи 109

Дано: $\triangle ABC$, $AB = AC$, AM — медиана, $P_{ABC} = 32$ см, $P_{ABM} = 24$ см.

Найти: AM.

Решение. 1. $P_{ABC} = AB + BC + AC = 32$ см. Так как $AB = AC$, $BM = MC$, то $BC = 2BM$ и $P_{ABC} = 2(AB + BM) = 32$ см, откуда $AB + BM = 16$ см.

2. $P_{ABM} = (AB + BM) + AM = 24$ см. Отсюда следует, что $AM = 24$ см $-$ 16 см $= 8$ см.

Доказательство теоремы о свойстве углов при основании равнобедренного треугольника, как правило, не вызывает затруднений у учащихся, и они могут изучить его самостоятельно по учебнику (п. 18). Это свойство в дальнейшем часто используется при решении задач и доказательстве теорем, поэтому оно должно быть хорошо усвоено. Чертёж, краткую запись условия и заключения теоремы, а также основные этапы доказательства полезно записать на доске и в тетрадях учащихся.

Дано: $\triangle ABC$ — равнобедренный, BC — основание.

Доказать: $\angle B = \angle C$.

Доказательство. Проведём биссектрису AD треугольника (рис. 64 учебника). $\triangle ABD = \triangle ACD$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = AC$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$, так как AD — биссектриса). Следовательно, $\angle B = \angle C$, что и требовалось доказать.

На применение изученной теоремы на уроке можно решить задачи 113, 118. При наличии времени полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

В равнобедренном треугольнике сумма всех углов равна 180°. Найдите углы этого треугольника, если известно, что: а) один из них равен 105°; б) один из них равен 38°.

Вариант II

В равнобедренном треугольнике сумма всех углов равна 180°. Найдите углы этого треугольника, если известно, что: а) один из углов равен 62°; б) один из углов равен 98°.

Теорему о биссектрисе равнобедренного треугольника, проведённой к основанию, учащиеся также могут изучить самостоятельно.

Затем можно решить задачу 119 с записью решения на доске и в тетрадях учащихся и задачу 120 (а).

Дома: пп. 16—18; вопросы для повторения 5—13 (с. 48); задачи 104, 106, 107, 111, 112, 115, 116, 117, 120 (б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной прямой, какие отрезки называются медианой, биссектрисой, высотой треугольника, какой треугольник называется равнобедренным, равносторонним; **уметь формулировать и доказывать** теорему о перпендикуляре к прямой и теорему о свойствах равнобедренного треугольника; **уметь выполнять** практические **задания** типа 100—104 и **решать задачи** типа 105, 107, 108, 112, 115, 117, 119, производя поиск и выделение нужной информации на данных рисунках.

§ 3 Второй и третий признаки равенства треугольников *(4 ч)*

Назначение параграфа — изучить второй и третий признаки равенства треугольников и выработать навыки использования этих признаков при решении задач.

В начале первого урока по этой теме полезно решить несколько задач по готовым чертежам с целью повторения первого признака равенства треугольников.

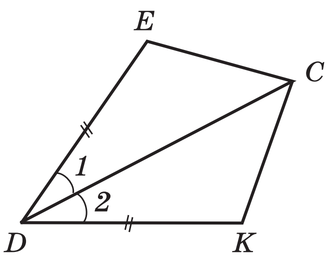

Рис. 17

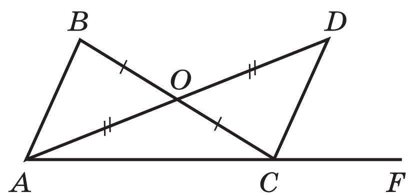

Рис. 18

1. На рисунке 17 $DE = DK$, $\angle 1 = \angle 2$. Найдите EC, $\angle DCK$ и $\angle DKC$, если $KC = 1{,}8$ дм, $\angle DCE = 45°$, $\angle DEC = 115°$.
2. На рисунке 18 $OB = OC$, $OA = OD$, $\angle ACB = 42°$, $\angle DCF = 68°$. Найдите $\angle ABC$.

Перед изучением второго признака равенства треугольников полезно предложить учащимся следующее практическое задание:

С помощью транспортира и масштабной линейки начертите треугольник ABC так, чтобы $\angle A = 46°$, $\angle B = 58°$, $AB = 4{,}8$ см.

При доказательстве теоремы о втором признаке желательно отметить аналогию с доказательством теоремы о первом признаке: в том и другом случае равенство треугольников доказывается путём такого наложения одного треугольника на другой, при котором они полностью совмещаются.

Для лучшего усвоения второго признака равенства треугольников полезно после доказательства теоремы решить несколько задач.

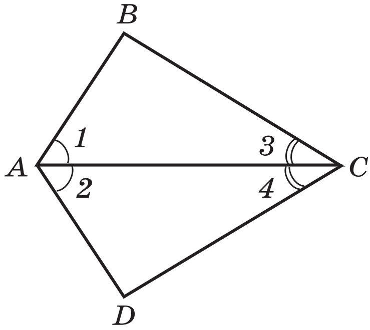

Рис. 19

1. На рисунке 19 $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.
2. На рисунке 20 $AC = CB$, $\angle A = \angle B$. Докажите, что $\triangle BCD = \triangle ACE$.
3. На рисунке 21 луч AD — биссектриса угла BAC, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle ACD$.
4. На рисунке 22 $BO = OC$, $\angle 1 = \angle 2$. Укажите равные треугольники на этом рисунке.
5. На рисунке 23 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle CAB = \angle DBA$. Укажите равные треугольники на этом рисунке.

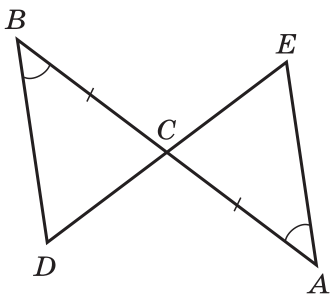

Рис. 20

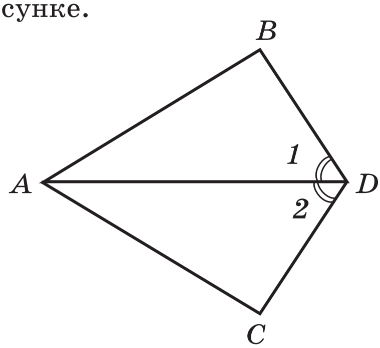

Рис. 21

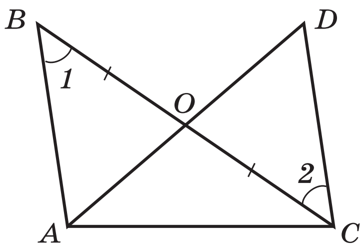

Рис. 22

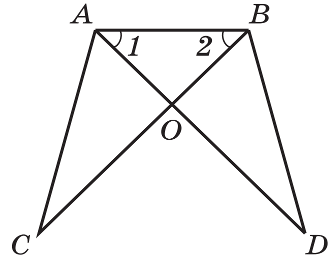

Рис. 23

Затем в классе можно решить задачи 121, 123, 126, 132. В решениях задач 127, 129—131 используются первый и второй признаки равенства треугольников; эти задачи более трудные, возможно, что кому-то из учащихся потребуется помощь учителя. Поэтому часть из них желательно решить в классе, записав решения на доске и в тетрадях.

Возможное оформление решения задачи 127

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$. $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $D \in AB$, $D_1 \in A_1B_1$, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ (рис. 24).

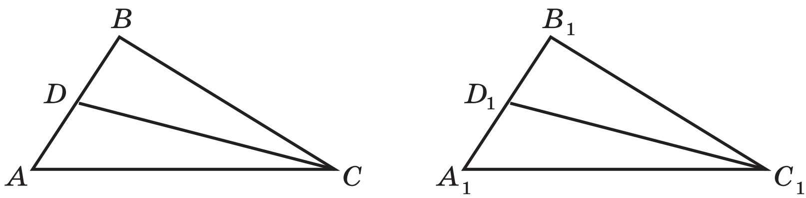

Рис. 24

Доказать: $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$.

Решение. 1. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ и $\angle B = \angle B_1$ по условию), следовательно, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

2. $\angle BCD = \angle ACB - \angle ACD$, $\angle B_1C_1D_1 = \angle A_1C_1B_1 - \angle A_1C_1D_1$. Так как $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ и $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$ (по условию), то $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$.

3. $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$ по стороне и прилежащим к ней углам ($BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$), что и требовалось доказать.

Задачи 127, 129—131 могут быть использованы также в индивидуальной работе с наиболее подготовленными учащимися.

Перед изучением третьего признака равенства треугольников желательно устно по готовым чертежам решить задачи на применение первого и второго признаков равенства треугольников и свойств равнобедренного треугольника.

1. На рисунке 25 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$, $AC = 12$ см, $BD = 5$ см, $\angle 4 = 27°$. Найдите AD, BC и $\angle 3$.

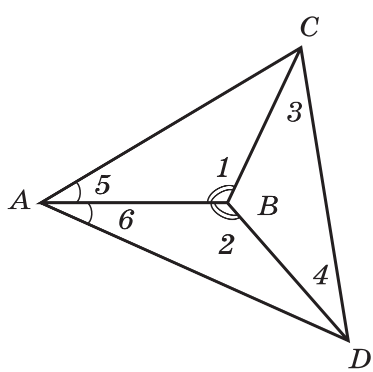

Рис. 25

2. На рисунке 26 $MN = NP$, $\angle NPK = 152°$. Найдите $\angle NMP$.

3. На рисунке 70, *а* учебника $A_1C = A_1C_1$, $CB_1 = C_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ABC_1$.

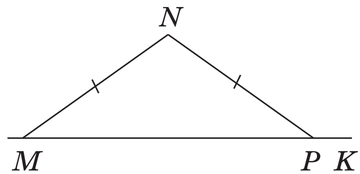

Рис. 26

Доказательство теоремы о третьем признаке равенства треугольников отличается от доказательств теорем о первом и втором признаках тем, что здесь не проводится наложение одного треугольника на другой. В процессе изучения теоремы о третьем признаке весьма полезна работа с рисунком 70, *б*, *в* учебника, по которому можно показать, что в случае, когда луч C_1C совпадает с одной из сторон угла $A_1C_1B_1$ или проходит вне этого угла, доказательство проводится аналогично случаю, когда луч C_1C проходит внутри угла $A_1C_1B_1$ (см. рис. 70, *а*). Можно также после того, как доказательство теоремы изложено учителем по рисунку 70, *а*, предложить одному из учащихся провести доказательство для случая, изображённого на рисунке 70, *в*.

Затем полезно решить устно задачи по готовым чертежам.

1. На рисунке 27 $KT = DM$, $KM = DT$. Докажите, что $\triangle TKM = \triangle MDT$.

2. На рисунке 28 $BC = AD$, $BE = DF$, $AE = CF$. Докажите, что: а) $\triangle ADF = \triangle CBE$; б) $\triangle ABE = \triangle CDF$.

После этого можно перейти к решению задач 135 (устно), 138 (записать решение на доске и в тетрадях), 139 (для случая (б) разобрать план решения). Задачи 140—142 могут быть использованы в индивидуальной работе с наиболее подготовленными учащимися. При решении задачи 142 учащиеся, как правило, рассматривают один из возможных случаев расположения точек A и B относительно прямой CD, поэтому желательно обратить их внимание на

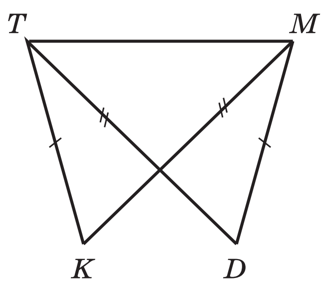

Рис. 27

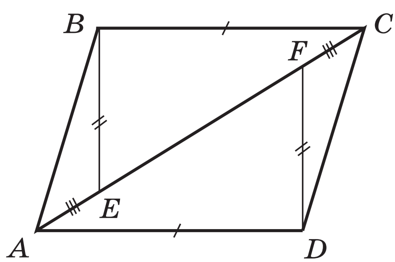

Рис. 28

то, что точки A и B могут располагаться как по одну сторону от прямой CD, так и по разные стороны от неё, т. е. нужно рассмотреть два случая.

В заключение можно провести *самостоятельную работу* проверочного характера (варианты I и II). В более подготовленном классе или отдельным учащимся можно предложить варианты III и IV.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Докажите равенство треугольников ABE и DCE на рисунке 29, если $AE = ED$, $\angle A = \angle D$. Найдите стороны треугольника ABE, если $DE = 3$ см, $DC = 4$ см, $EC = 5$ см.
2. На рисунке 19 (см. с. 35) $AB = AD$, $BC = CD$. Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

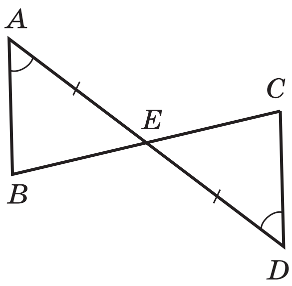

Рис. 29

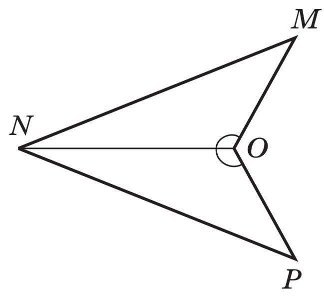

Рис. 30

Вариант II

1. Докажите равенство треугольников MON и PON на рисунке 30, если $\angle MON = \angle PON$, а луч NO — биссектриса угла MNP. Найдите углы треугольника NOP, если $\angle MNO = 42°$, $\angle NMO = 28°$, $\angle NOM = 110°$.
2. На рисунке 17 (см. с. 34) $DE = DK$, $CE = CK$. Докажите, что луч CD — биссектриса угла ECK.

Вариант III

1. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $\angle CAD = \angle C_1A_1D_1$. Докажите, что: а) $\triangle ADC = \triangle A_1D_1C_1$; б) $\triangle ADB = \triangle A_1D_1B_1$.
2. На рисунке 31 треугольник MNP равнобедренный с основанием MP, точка K — середина отрезка MP, $ME = PF$. Докажите, что луч KN — биссектриса угла EKF.

Вариант IV

1. В треугольниках DEC и $D_1E_1C_1$ $DE = D_1E_1$, $\angle D = \angle D_1$, $\angle E = \angle E_1$. На сторонах DE и D_1E_1 отмечены точки P и P_1 так, что $\angle DCP = \angle D_1C_1P_1$. Докажите, что: а) $\triangle DCP = \triangle D_1C_1P_1$; б) $\triangle CPE = \triangle C_1P_1E_1$.
2. На рисунке 31 треугольник MNP равнобедренный с основанием MP, точка K — середина отрезка MP, $\angle MKE = \angle PKF$. Докажите, что $\triangle NEK = \triangle NFK$.

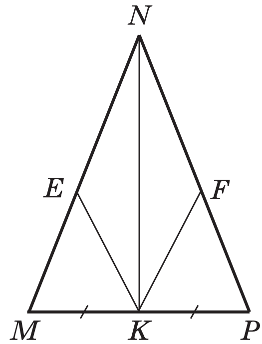

Рис. 31

Желательно выделить время на проведение анализа решения задач этой самостоятельной работы (может быть, некоторых отдельных фрагментов решения задач). В целях экономии времени можно использовать мультимедийное оборудование.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-9 из дидактических материалов.

Дома: пп. 19, 20; вопросы для повторения 14, 15 (с. 48); задачи 122, 124, 125, 128, 133, 134, 136, 137.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны не только **знать формулировку и доказательство** теоремы о втором признаке равенства треугольников, но и уметь провести сравнительный анализ двух способов наложения одного треугольника на другой, использованных в доказательствах теорем о первом и втором признаках, сопоставляя способ наложения с условием теоремы; и также не только **знать формулировку и доказательство** теоремы о третьем признаке равенства треугольников, но и аргументировать необходимость рассмотрения трёх случаев и проводить в каждом из них доказательные рассуждения; **уметь решать задачи** типа 121—123, 125, 129, 132, 136—139, находя в каждой из них равные треугольники и обосновывая их равенство с помощью подходящего признака.

§ 4 Задачи на построение *(3 ч)*

Назначение параграфа состоит в том, чтобы дать представление о новом классе задач — задач на построение геометрических фигур с помощью циркуля и линейки без масштабных делений — и рассмотреть основные (простейшие) задачи этого типа.

Задачам на построение предшествует рассмотрение окружности и её элементов (п. 21). Здесь впервые вводится понятие определения, поэтому желательно остановиться на этом вопросе и показать учащимся, что они фактически уже встречались с определениями некоторых геометрических фигур, например угла, треугольника, вертикальных углов.

Изучение темы «Окружность» полезно начать с систематизации сведений, известных учащимся из курса математики предыдущих классов. Для этого можно организовать самостоятельную работу по учебнику и заранее заготовленным плакатам или при помощи мультимедийного оборудования, уделив особое внимание отработке определения окружности и её элементов.

Проверку усвоения изученного материала можно провести при решении задач 143 (устно), 144, 147 (с записью решения на доске и в тетрадях учащихся). При решении задачи 147 полезно рекомендовать учащимся после изображения окружности начертить прямой угол с вершиной в точке O — центре этой окружности, а затем отметить на окружности точки A и B пересечения сторон прямого угла с окружностью. При наличии времени можно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

Отрезки KM и EF являются диаметрами окружности с центром O. Докажите, что: а) $\angle FEM = \angle KME$; б) отрезки KE и MF равны.

Вариант II

Отрезки ME и PK являются диаметрами окружности с центром O. Докажите, что: а) $\angle EMP = \angle MPK$; б) отрезки MK и PE равны.

Вариант III

В окружности с центром O проведены диаметр AC и радиус OB так, что хорда BC равна радиусу. Найдите $\angle AOB$, если $\angle BCO = 60°$.

Вариант IV

В окружности с центром O проведены хорды AB и CD (рис. 32). Докажите, что $AB = CD$, если $\angle AOC = \angle BOD$.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-11 из дидактических материалов.

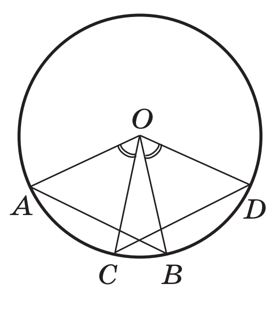

Рис. 32

Изучение пп. 22 и 23 целесообразно начать с напоминания об известных учащимся способах построения геометрических фигур с помощью различных инструментов. При этом можно отметить, что при построении отрезка заданной длины использовалась линейка с миллиметровыми делениями, а при построении угла заданной градусной меры — транспортир. Но оказывается, многие построения в геометрии могут быть выполнены с помощью только циркуля и линейки без делений. В дальнейшем, говоря о задачах на построение, мы будем иметь в виду именно такие построения.

Задачи на построение циркулем и линейкой являются традиционным материалом, изучаемым в курсе планиметрии. Обычно эти задачи решаются по схеме, состоящей из четырёх частей (см. с. 94 учебника). Сначала рисуют (чертят) искомую фигуру и устанавливают связи между данными задачи и искомыми элементами. Эта часть решения называется анализом. Она даёт возможность составить план решения задачи. Затем по намеченному плану выполняется построение циркулем и линейкой. После этого нужно доказать, что построенная фигура удовлетворяет условиям задачи. И наконец, необходимо исследовать, при любых ли данных задача имеет решение, и если имеет, то сколько решений.

В тех случаях, когда задача достаточно простая, отдельные части, например анализ или исследование, можно опустить. В 7 классе при решении задач на построение рекомендуется ограничиваться только выполнением построения. В отдельных случаях можно провести устно анализ и доказательство, а элементы исследования должны присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи. Учащимся, проявляющим повышенный интерес к предмету, полезно решать задачи на построение по полной схеме.

На уроках по этой теме нужно прежде всего отработать навыки решения простейших задач на построение циркулем и линейкой, рассмотренных в учебнике.

1. На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.
2. Отложить от данного луча угол, равный данному.
3. Построить биссектрису данного неразвёрнутого угла.
4. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к прямой, на которой лежит данная точка.
5. Построить середину данного отрезка.
6. Даны прямая и точка, не лежащая на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой (задача 153).

После этого в классе можно решить задачи 148, 150, 151, 152, акцентируя внимание учащихся на том, что, приступая к решению задачи на построение, нужно начертить все фигуры, данные в её условии.

При наличии времени можно провести *самостоятельную работу* по вариантам С-12 из дидактических материалов.

Дома: пп. 21—23; вопросы для повторения 16—21 (с. 49); задачи 145, 146, 149, 154, 155.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, что такое определение, приводить примеры определений из уже пройденного материала, формулировать определение окружности и связанных с нею понятий (центр, радиус, хорда, диаметр, дуга); **уметь объяснить**, что понимается в геометрии под словами «задача на построение» и как с помощью циркуля и линейки выполнить простейшие (базовые) построения: угла, равного данному; биссектрисы данного угла; прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой; середины данного отрезка; **уметь применять** простейшие построения при решении задач типа 148—151, 154, 155, составляя в многошаговых задачах план решения, в котором на каждом шаге выполняется какое-то одно из простейших построений, развивая потребность в обосновании проведённого построения и исследовании возможных ситуаций в зависимости от исходных данных (существование решения, количество решений).

Решение задач *(3 ч)*

Назначение этих уроков — закрепить навыки в решении задач на применение признаков равенства треугольников, продолжить выработку навыков решения задач на построение с помощью циркуля и линейки, подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

Для решения в классе рекомендуется использовать те из задач 157, 159, 160, 162, 163, 169, 171, 172, 181, 183, которые, по мнению учителя, наиболее подходят для данного класса. Для более продуктивной работы на уроках полезно использовать рабочую тетрадь, таблицы с готовыми чертежами, мультимедийное оборудование.

Сильным учащимся можно предложить задачи 158, 165, 166, 167, 173, 174, 175, 176, 178, 179.

На одном из уроков полезно провести проверочную *самостоятельную работу* на 25—30 минут (лучше это сделать на втором уроке).

Самостоятельная работа

Вариант I

1. На рисунке 33 $AB = AC$ и $\angle ACE = \angle ABD$. а) Докажите, что $\triangle ACE = \triangle ABD$. б) Найдите стороны треугольника ABD, если $AE = 15$ см, $EC = 10$ см, $AC = 7$ см.
2. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. На сторонах BC и B_1C_1 отмечены точки K и K_1, такие, что $CK = C_1K_1$. Докажите, что $\triangle ABK = \triangle A_1B_1K_1$.

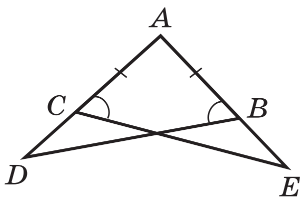

Рис. 33

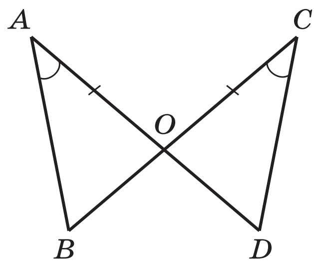

Рис. 34

Вариант II

1. На рисунке 34 $AO = CO$ и $\angle BAO = \angle DCO$. а) Докажите, что $\triangle AOB = \triangle COD$. б) Найдите углы треугольника AOB, если $\angle OCD = 37°$, $\angle ODC = 63°$, $\angle COD = 80°$.
2. Известно, что в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1$, $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$.

Варианты III и IV предназначены для наиболее подготовленных учащихся.

Вариант III

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что прямая BO перпендикулярна к прямой AC.

Вариант IV

В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC медианы BD и CE, проведённые к боковым сторонам, пересекаются в точке M. Докажите, что прямые AM и BC перпендикулярны.

Для домашней работы можно использовать задачи 156, 161, 164, 168, 170, 177, 180, 182, 184, 185.

Контрольная работа № 2 *(1 ч)*

Вариант I

1. На рисунке 35 отрезки AB и CD имеют общую середину O. Докажите, что $\angle DAO = \angle CBO$.
2. Луч AD — биссектриса угла A. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что $AB = AC$.

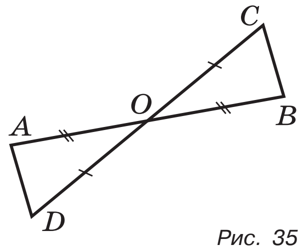

Рис. 35

3. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием BC. С помощью циркуля и линейки проведите медиану BB_1 к боковой стороне AC.

Вариант II

1. На рисунке 36 отрезки ME и PK точкой D делятся пополам. Докажите, что $\angle KMD = \angle PED$.
2. На сторонах угла D отмечены точки M и K так, что $DM = DK$. Точка P лежит внутри угла D и $PK = PM$. Докажите, что луч DP — биссектриса угла MDK.

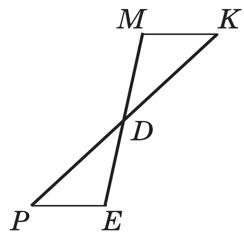

Рис. 36

3. Начертите равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и острым углом B. С помощью циркуля и линейки проведите высоту из вершины угла A.

Вариант III (для более подготовленных учащихся)

1. На рисунке 37 прямые AB и CD пересекаются в точке E, $CE = BE$, $\angle C = \angle B$, AA_1 и DD_1 — биссектрисы треугольников ACE и DBE. Докажите, что $AA_1 = DD_1$.
2. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $AB = AC$. Точка M лежит внутри угла A, и $MB = MC$. На прямой AM отмечена точка D так, что точка M лежит между точками A и D. Докажите, что $\angle BMD = \angle CMD$.

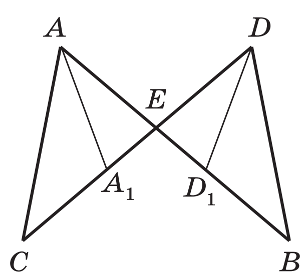

Рис. 37

3. Начертите равнобедренный тупоугольный треугольник ABC с основанием BC и с тупым углом A. С помощью циркуля и линейки проведите:
   а) высоту треугольника ABC из вершины угла B;
   б) медиану треугольника ABC к стороне AB;
   в) биссектрису AD треугольника ABC.

Вместо этих вариантов можно использовать варианты контрольной работы К-2 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о первом признаке равенства треугольников.
2. На рисунке 38 $AB = DB$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle DBC$.
3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отмечены точки D и D_1 так, что $CD = C_1D_1$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$.

Вариант II

1. Сформулируйте теорему о втором признаке равенства треугольников.
2. На рисунке 39 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.
3. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены биссектрисы AD и A_1D_1 Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, если $DC = D_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$.

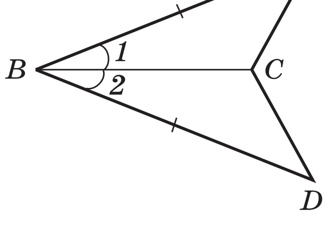

Рис. 38

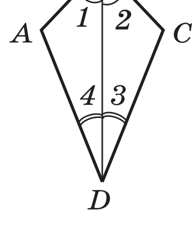

Рис. 39

Вариант III

1. Сформулируйте теорему о третьем признаке равенства треугольников.
2. На рисунке 40 $AB = DC$, $BC = AD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle CDA$.

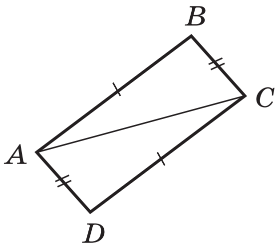

Рис. 40

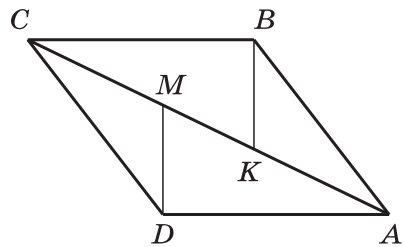

Рис. 41

3. На рисунке 41 $AB = DC$, $BK = DM$, $AM = CK$. Докажите, что $\triangle ADM = \triangle CBK$.

Вариант IV

1. Сформулируйте теорему о свойстве углов равнобедренного треугольника.
2. На рисунке 42 $AB = BC$, $AD = DC$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.
3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC взяты точки D и E так, что $AD = CE$. Докажите, что треугольник DBE равнобедренный.

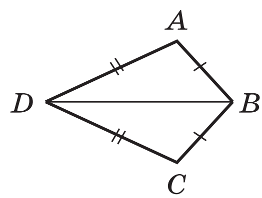

Рис. 42

Вариант V

1. Сформулируйте теорему о биссектрисе, проведённой к основанию равнобедренного треугольника.
2. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BD, $\angle ABD = 37°$, $AC = 25$ см. Найдите $\angle B$, $\angle BDC$ и DC.
3. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием DE проведена биссектриса CF. Найдите CF, если периметр треугольника CDE равен 84 см, а треугольника CFE — 56 см.

Вариант VI

1. Объясните, какой отрезок называется перпендикуляром, проведённым из данной точки к данной прямой.
2. Сформулируйте теорему о перпендикуляре, проведённом из данной точки к данной прямой.
3. С помощью циркуля и линейки постройте середину данного отрезка.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы II

115. Запись решения задачи значительно упрощается, если ввести цифровые обозначения углов, как показано на рисунке 43.

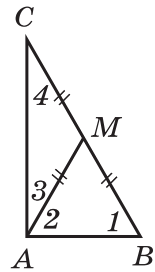

Рис. 43

Решение. 1) $\triangle AMB$ равнобедренный, так как $AM = MB$, следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. 2) $\triangle AMC$ равнобедренный, так как $AM = CM$, следовательно, $\angle 3 = \angle 4$. 3) $\angle BAC = \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$. Таким образом, $\angle BAC = \angle B + \angle C$.

139 (а, б). Можно рекомендовать следующую краткую запись решения:

а) $\triangle ABC = \triangle CDA$ по трём сторонам, следовательно, $\angle ABC = \angle CDA$. Так как BE и DF — биссектрисы углов ABC и CDA, то $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$, $\angle ADF = \frac{1}{2}\angle CDA$, откуда следует, что $\angle ABE = \angle ADF$.

б) Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $\angle BAE = \angle DCF$. Далее, $\angle ABE = \angle ADF = \angle CDF$. Итак, $\angle ABE = \angle CDF$, $\angle BAE = \angle DCF$ и $AB = CD$ по условию, следовательно, $\triangle ABE = \triangle CDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам.

149. При решении задач на построение полезно, как уже отмечалось, акцентировать внимание учащихся на том, что вначале необходимо начертить все фигуры, данные в условии задачи. Например, в данной задаче чертим прямую a, отрезок PQ и отмечаем точку B так, что $B \notin a$ (рис. 44, a).

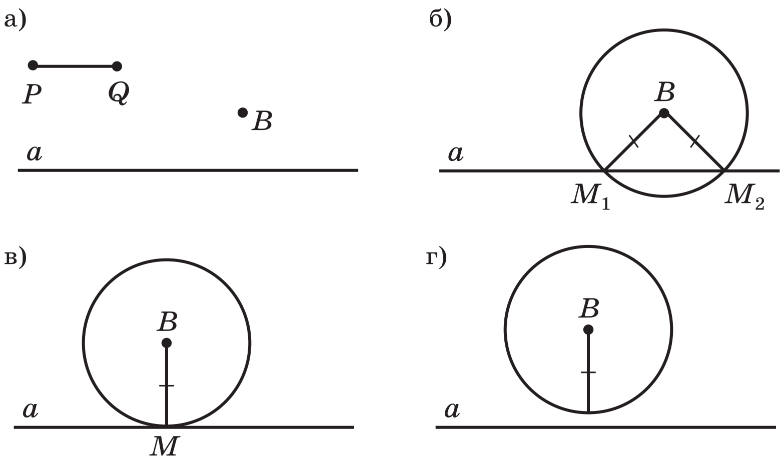

Рис. 44

Далее проводим окружность радиуса PQ с центром в точке B. Пусть M — одна из точек пересечения этой окружности с прямой a. Точка M искомая, так как $M \in a$ и $BM = PQ$.

Остаётся выяснить, всегда ли задача имеет решение. Ответ на этот вопрос учащиеся могут дать с помощью рисунка 44, *б*, *в*, *г*. Мы видим на рисунке 44, *г*, что задача не имеет решений.

152. Начертим тупой угол AOB, построим биссектрису OC этого угла и проведём продолжение OX луча OC (рис. 45). Луч OX искомый. Убедимся в этом. По построению OC — биссектриса угла AOB, поэтому $\angle AOC = \angle COB = \frac{1}{2}\angle AOB$ и углы AOC и COB острые. По построению углы AOC и AOX, а также углы COB и BOX смежные. Сумма смежных углов равна $180°$, поэтому из равенства $\angle AOC = \angle BOC$ следует, что $\angle AOX = \angle BOX$. Так как углы AOC и COB острые, то смежные с ними углы AOX и BOX тупые.

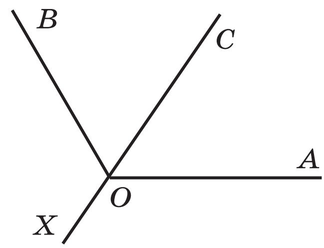

Рис. 45

160. Обозначим буквой O середину отрезка AB, тогда $O \in a$.

а) Возьмём произвольную точку M прямой a. Если M лежит на прямой AB, то она совпадает с точкой O, поэтому $AM = MB$. Пусть точка M не лежит на прямой AB; $\triangle AOM = \triangle BOM$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $MA = MB$.

б) Возьмём теперь точку M плоскости, такую, что $AM = BM$. Если точка M лежит на прямой AB, то ясно, что она совпадает с точкой O и поэтому $M \in a$. Предположим, что точки M, A и B не лежат на одной прямой. Треугольник MAB равнобедренный ($AM = BM$), и отрезок MO — медиана этого треугольника ($AO = OB$). Поэтому MO также высота треугольника (см. п. 18), т. е. $MO \perp AB$. Следовательно, прямая MO совпадает с прямой a, и, значит, $M \in a$.

165. Первая часть решения задачи (пункт *а*), как правило, не вызывает затруднений у учащихся. Для доказательства того факта, что точка O лежит на прямой KK_1 (пункт *б*), полезно дать учащимся указание: рассмотрите луч OK_2, являющийся продолжением луча OK, и докажите, что лучи OK_1 и OK_2 совпадают. Тем самым будет доказано, что точки K, O и K_1 лежат на одной прямой.

173*. Решение. Пусть угол BAD — угол, смежный с углом A данного треугольника ABC (рис. 46). Докажем, например, неравенство $\angle BAD > \angle B$. Для этого отметим середину O отрезка AB и на продолжении луча OC отложим отрезок OE, равный отрезку OC; $\triangle OBC = \triangle OAE$ по двум сторонам и углу между ними (см. рис. 46), поэтому $\angle B = \angle OAE$. Но $\angle OAE < \angle BAD$, так как луч AE делит угол BAD на два угла, следовательно, $\angle B < \angle BAD$.

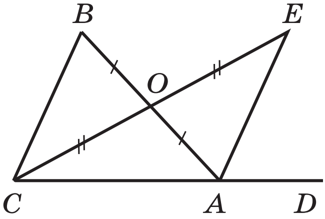

Рис. 46

174*. При решении этой задачи используется утверждение, сформулированное в задаче 173.

Решение. Наложим треугольник ABC на треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона BC совместилась со стороной B_1C_1 ($BC = B_1C_1$ по условию), а сторона BA наложилась на луч B_1A_1 ($\angle B = \angle B_1$ по условию) (рис. 47).

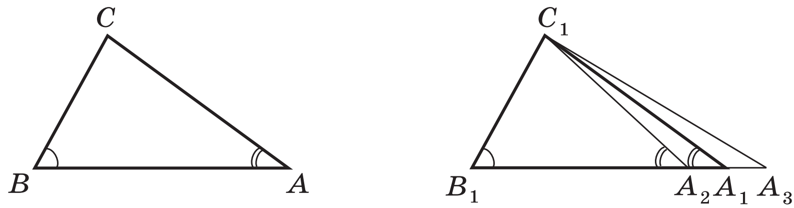

Рис. 47

При этом точка A совместится либо с точкой A_1, либо с какой-то точкой, лежащей на луче B_1A_1 по одну или по другую сторону от A_1 (с точкой A_2 или точкой A_3). Допустим, что точка A совместится с точкой A_2. Тогда треугольник ABC совместится с треугольником $A_2B_1C_1$, и поэтому $\angle B_1A_2C_1 = \angle A = \angle B_1A_1C_1$. Но угол $B_1A_2C_1$ смежный с углом A_2 треугольника $A_1C_1A_2$, и, следовательно, он должен быть больше угла $B_1A_1C_1$ (задача 173). Значит, точка A не может совместиться с точкой A_2. Аналогично можно доказать, что точка A не может совместиться с точкой A_3. Следовательно, точка A совместится с точкой A_1. В результате треугольник ABC полностью совместится с треугольником $A_1B_1C_1$, и, значит, эти треугольники равны.

175*. Запись решения задачи значительно упрощается, если ввести цифровые обозначения углов, как показано на рисунке 48.

Решение. 1) $\triangle OAD = \triangle OBC$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

2) Углы 3 и 5, а также углы 4 и 6 являются смежными, поэтому из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что $\angle 5 = \angle 6$.

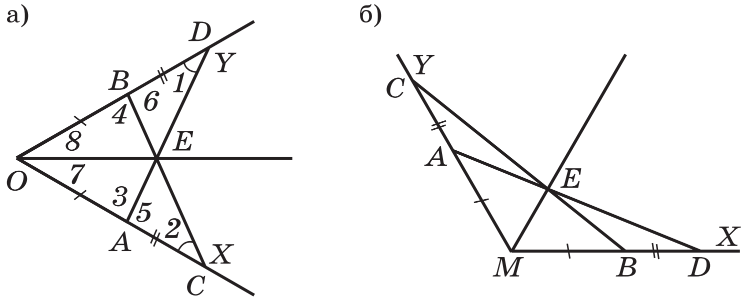

Рис. 48

3) $\triangle EBD = \triangle EAC$ по стороне и двум прилежащим углам, поэтому $EB = EA$.

4) $\triangle OAE = \triangle OBE$ по трём сторонам, следовательно, $\angle 7 = \angle 8$, т. е. OE — биссектриса угла XOY.

Для построения биссектрисы произвольного угла M на его сторонах откладываем отрезки $MA = MB$, $AC = BD$, как показано на рисунке 48, *б*, и проводим отрезки AD и BC. Затем проводим искомый луч ME, где E — точка пересечения отрезков AD и BC.

176*. Решение. Проведём отрезки MD, BD, M_1D_1, B_1D_1 (рис. 49).

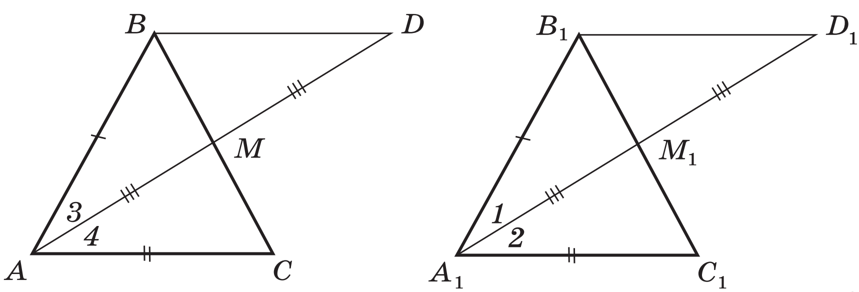

Рис. 49

1) $\triangle BMD = \triangle CMA$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $BD = AC$, $\angle D = \angle 4$. Аналогично $\triangle B_1M_1D_1 = \triangle C_1M_1A_1$, откуда $B_1D_1 = A_1C_1$, $\angle D_1 = \angle 2$. Отсюда следует, что $BD = B_1D_1$.

2) $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$ по трём сторонам, поэтому $\angle 3 = \angle 1$, $\angle D = \angle D_1$, следовательно, $\angle 4 = \angle 2$.

3) $\angle A = \angle A_1$, так как $\angle A = \angle 4 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 1 = \angle A_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

177*. Решение. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$ (рис. 50).

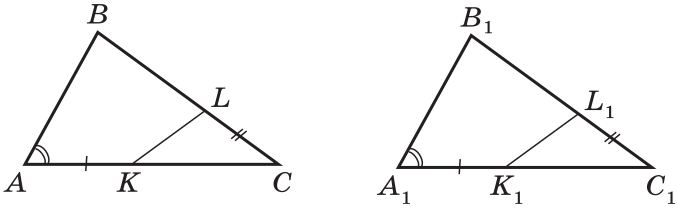

Рис. 50

1) $\triangle CKL = \triangle C_1K_1L_1$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle C = \angle C_1$, $CK = AC - AK = A_1C_1 - A_1K_1 = C_1K_1$, $LC = L_1C_1$), поэтому $KL = K_1L_1$.

2) $\triangle ABL = \triangle A_1B_1L_1$ по двум сторонам и углу между ними ($\angle B = \angle B_1$, $BA = B_1A_1$, $BL = B_1L_1$), поэтому $AL = A_1L_1$.

178*. Решение. Пусть точка B лежит на отрезке AC. Допустим, что $AD = BD = CD$. Тогда треугольники ADC, ADB и BDC равнобедренные, поэтому $\angle A = \angle C$, $\angle A = \angle ABD$, $\angle C = \angle DBC$. Следовательно, $\angle ABD = \angle CBD$. Но эти углы смежные, а так как они равны, то каждый из них равен $90°$. Итак, угол A и угол ABD — прямые углы, т. е. прямые AD и BD перпендикулярны к прямой AC. Но это невозможно, так как они пересекаются в точке D. Значит, наше предположение, что $AD = BD = CD$, неверно, поэтому хотя бы два из этих отрезков не равны друг другу.

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы II

В соответствии с первым вариантом тематического планирования учебного материала на изучение темы «Треугольники» отводится 14 часов. Их можно распределить следующим образом:

§ 1. Первый признак равенства треугольников	3 ч
§ 2. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	3 ч
§ 3. Второй и третий признаки равенства треугольников	3 ч
§ 4. Задачи на построение	2 ч
Решение задач	2 ч
Контрольная работа № 2	1 ч

Поскольку приведённый план несущественно отличается от второго варианта планирования данной темы, все рекомендации по проведению уроков, данные выше, могут быть использованы и здесь. Нужно лишь на уроках, отведённых на решение задач по теме в целом, ограничиться задачами, аналогичными тем, которые включены в контрольную работу. Для проведения контрольной работы № 2 можно использовать варианты, предложенные выше.

ГЛАВА

III Параллельные прямые *(13 ч)*

В этой главе вводится одно из важнейших понятий — понятие параллельных прямых и даётся первое представление об аксиомах и аксиоматическом методе в геометрии. Изучаются признаки и свойства параллельных прямых. На основе новых геометрических фактов существенно расширяется круг задач. Теория параллельных прямых даёт богатый материал и для внеклассной работы, в частности для ознакомления учащихся с вопросами истории, связанными с пятым постулатом Евклида.

Примерное поурочное планирование

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Признаки параллельности двух прямых	4	84—104	С-13
§ 2. Аксиома параллельных прямых	5	105—115	С-14, С-15, С-16
Решение задач	3	84—115	—
Контрольная работа № 3	1	—	К-3

§ 1 Признаки параллельности двух прямых *(4 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятие параллельных прямых, рассмотреть признаки параллельности двух прямых, связанные с накрест лежащими, односторонними и соответственными углами, и показать, как они применяются при решении задач.

Вопрос о возможных случаях взаимного расположения двух прямых на плоскости рассматривался на первых уроках геометрии. Поэтому изучение темы можно начать с повторения, используя при этом готовые чертежи, плакаты или мультимедийное оборудование. Можно предложить учащимся провести обоснование того факта, что две прямые не могут иметь двух или более общих точек, а затем дать определение параллельных прямых и соответствующее обозначение: $a \parallel b$.

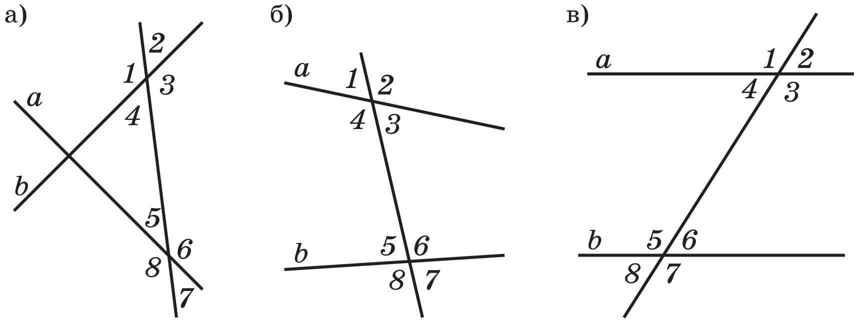

Рис. 51

По рисунку 99 учебника можно ввести понятие параллельных отрезков, отрезка и прямой, луча и прямой, отрезка и луча, двух лучей.

При рассмотрении различных пар углов, образованных двумя прямыми и секущей, рекомендуется провести работу, используя заранее заготовленные таблицы или рисунки на доске. Например:

1. По рисунку 51, *а—в* назовите пары накрест лежащих, односторонних, соответственных углов.
2. На рисунке 51, *в* $\angle 4 = \angle 6$. Докажите, что $\angle 5 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 2 = \angle 8$.
3. На рисунке 51, *в* $\angle 1 = \angle 5$.

   а) Выпишите все пары накрест лежащих углов и докажите, что в каждой паре углы равны.

   б) Выпишите все пары соответственных углов и докажите, что в каждой паре углы равны.

   в) Выпишите все пары односторонних углов и докажите, что сумма углов в каждой паре равна $180°$.

Перед изучением признака параллельности двух прямых, использующего накрест лежащие углы, желательно повторить признаки равенства треугольников и утверждение о том, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (п. 12). После этого можно ещё раз остановиться на определении параллельных прямых и отметить, что так как прямые бесконечны, то невозможно непосредственно убедиться в том, что они не имеют общей точки. Поэтому желательно иметь какие-то признаки, по которым можно сделать вывод о параллельности прямых.

Уместно напомнить учащимся, что с понятием «признак» они уже встречались, когда изучали признаки равенства треугольников. Теперь же предстоит познакомиться с признаками параллельности двух прямых.

Доказательство теоремы, выражающей признак параллельности двух прямых, связанный с накрест лежащими углами, полезно провести по тексту учебника. Оно не является традиционным — во многих учебниках этот признак доказывается методом от противного. В процессе доказательства необходимо акцентировать внимание учащихся на назначении дополнительных построений (рис. 101, *в* учебника). Теорема является важной и сама по себе, и потому, что на неё опираются доказательства других теорем о признаках параллельности прямых. После доказательства теоремы можно по рисункам учебника или по ранее заготовленным плакатам решить устно задачи 187 и 189. Решение задачи 191 желательно записать на доске и в тетрадях учащихся.

Два других признака, использующие соответственные и односторонние углы, можно предложить учащимся изучить самостоятельно. В качестве упражнений для усвоения рассмотренных теорем можно решить задачи 186 (а, в), 192.

После этого следует познакомиться с практическими способами построения параллельных прямых (п. 26) и выполнить задание 195. В качестве повторения можно решить задачу на построение прямой, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

При наличии времени полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Параллельны ли прямые d и e, изображённые на рисунке 52?
2. На рисунке 53 точка O — середина отрезков EL и KF. Докажите, что $EF \parallel KL$.

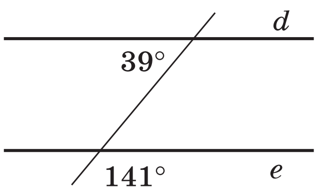

Рис. 52

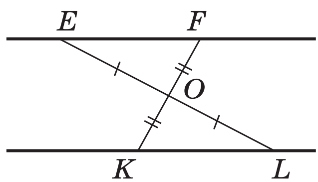

Рис. 53

Вариант II

1. Параллельны ли прямые m и n, изображённые на рисунке 54?
2. На рисунке 55 отрезки MQ и NP пересекаются в их середине F. Докажите, что $MN \parallel PQ$.

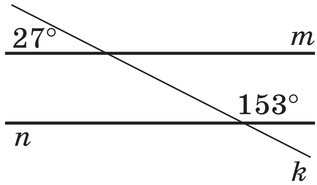

Рис. 54

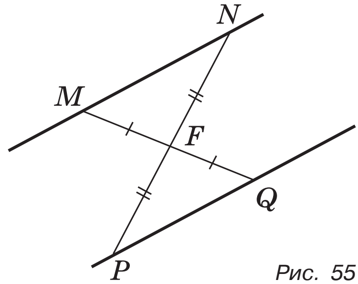

Рис. 55

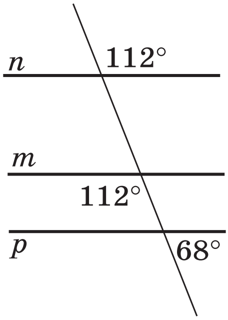

Рис. 56

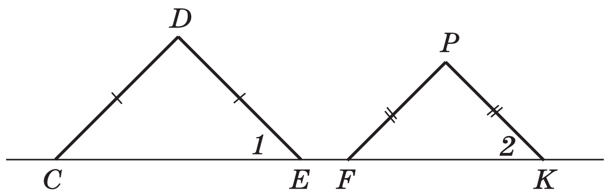

Рис. 57

Вариант III

1. Какие из прямых m, n и p, изображённых на рисунке 56, являются параллельными? Ответ обоснуйте.
2. В равнобедренных треугольниках CDE и FPK, изображённых на рисунке 57, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $CD \parallel PF$.

Вариант IV

1. На рисунке 58 $MQ = NP$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $MN \parallel PQ$.
2. В равнобедренных треугольниках ABC и DEF, изображённых на рисунке 59, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB \parallel EF$.

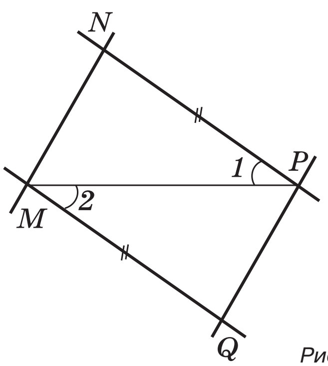

Рис. 58

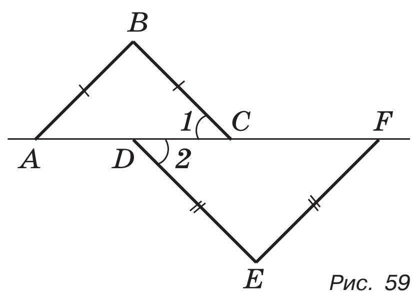

Рис. 59

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельной работы С-13 из дидактических материалов.

Дома: пп. 24—26; вопросы для повторения 1—6 (с. 66); задачи 186 (б), 188, 190, 193, 194.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать** определения параллельных прямых, параллельных отрезков, параллельных отрезка и прямой, луча и прямой и т. д.; **уметь объяснить** (и показать на рисунке), какие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, называются накрест лежащими, односторонними, соответственными; **усвоить формулировки и доказательства** теорем о признаках параллельности двух прямых, проявив при этом умение работать с текстом учебника; **уметь решать задачи** типа 186—189, 191, 194; **уметь строить** параллельные прямые с помощью чертёжного угольника и линейки.

§ 2 Аксиома параллельных прямых *(5 ч)*

Назначение параграфа — дать представление об аксиомах геометрии, ввести аксиому параллельных прямых; рассмотреть свойства параллельных прямых и показать, как они используются при решении задач.

Распределить материал по урокам можно следующим образом: пп. 27, 28 — 1 урок, п. 29 — 2 урока, п. 30 — 1 урок, решение задач — 1 урок.

Так как учащиеся впервые встречаются с понятием аксиомы, то учителю следует начать изложение нового материала с беседы об аксиомах геометрии, причём можно использовать п. 27 и приложения 1 и 2 из учебника, а также книгу Г. И. Глейзера «История математики в школе», вышедшую в издательстве «Просвещение» в 1982 г.

Затем можно предложить учащимся задачу, решение которой дано в начале п. 28: через точку M, не лежащую на прямой a, провести прямую, параллельную прямой a. Решение этой задачи доказывает существование прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой.

После этого можно поставить вопрос: сколько таких прямых можно провести? Полезно рассказать учащимся о том, что в геометрии Евклида, изложенной им в книге

«Начала», ответ на данный вопрос следует из знаменитого пятого постулата, и этот ответ таков: через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной. Пятый постулат знаменит тем, что долгие годы его пытались доказать на основе остальных аксиом Евклида. И лишь в XIX в., во многом благодаря великому русскому математику Н. И. Лобачевскому, было доказано, что пятый постулат не может быть выведен из остальных аксиом. Поэтому утверждение о единственности прямой, проходящей через данную точку параллельно данной прямой, принимается в качестве аксиомы. Следует обратить внимание учащихся на то, что в аксиоме утверждается, что через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной (единственность прямой), а существование такой прямой доказывается.

Далее можно решить задачи 196 (устно) и 197. При решении задачи 197 полезно на рисунке показать учащимся два возможных случая расположения прямых:

а) все четыре прямые пересекают прямую p;

б) одна из четырёх прямых параллельна прямой p, а три другие прямые пересекают её.

Эти два случая иллюстрируют ответ на вопрос задачи: по крайней мере три прямые пересекают прямую p.

В этом параграфе учащиеся впервые встречаются с понятием следствия, поэтому нужно разъяснить смысл этого понятия, после чего рассмотреть следствия 1^0 и 2^0 из аксиомы параллельных прямых и решить задачи 198, 200, 213. При наличии времени полезно устно решить задачи 217 и 218. Задачу 219 можно предложить учащимся, проявляющим интерес к геометрии.

Свойства параллельных прямых, рассмотренные в этом параграфе, связаны с парами углов, которые образуются при пересечении двух прямых секущей. Желательно добиться от учащихся понимания того, что накрест лежащие, соответственные и односторонние углы можно рассмотреть для любых двух прямых и секущей, но только в случае параллельных прямых накрест лежащие углы равны, соответственные углы равны, а сумма односторонних углов составляет $180°$.

При доказательстве теоремы о накрест лежащих углах нужно отметить, что она является обратной теореме о соответствующем признаке параллельности двух прямых. Полезно сравнить условия и заключения двух теорем — теоремы, выражающей признак параллельности двух прямых, и обратной теоремы о свойстве параллельных прямых, составив следующую таблицу:

Признак параллельности прямых a и b	Свойство параллельных прямых a и b
Дано: прямые a и b, секущая c, $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы, $\angle 1 = \angle 2$	Дано: прямые a и b, секущая c, $\angle 1$ и $\angle 2$ — накрест лежащие углы, $a \parallel b$
Доказать: $a \parallel b$	Доказать: $\angle 1 = \angle 2$

После рассмотрения теоремы следует акцентировать внимание учащихся на методе доказательства от противного, с помощью которого и была доказана теорема. Кроме того, важно отметить, что если верно некоторое утверждение, то отсюда ещё не следует, что и обратное утверждение тоже верно. Можно, например, рассмотреть два утверждения:

1) Если точка C — середина отрезка AB, то $AC = CB$.

2) Если $AC = CB$, то точка C — середина отрезка AB.

Второе утверждение является обратным первому. Первое утверждение верно, в то время как второе неверно. В самом деле, в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB отрезки AC и CB равны, но точка C не является серединой отрезка AB.

Можно предложить учащимся сформулировать утверждение, обратное теореме о смежных углах, и показать, что оно не имеет места. Полезно также предложить учащимся самостоятельно (может быть, в качестве домашнего задания) подобрать один-два примера прямых и обратных утверждений.

Затем рекомендуется решить задачи 202, 203 (б), 220.

Следствие из доказанной на уроке теоремы можно использовать в качестве задачи для самостоятельного решения с последующей проверкой. Теоремы о свойствах соответственных и односторонних углов, образованных двумя параллельными и секущей, учащиеся могут изучить самостоятельно по учебнику. На применение свойств рекомендуется решить задачи 205, 206, 208, 211 (в).

Доказательство теоремы об углах с соответственно параллельными сторонами учителю следует рассказать самому, а изучение теоремы об углах с соответственно перпендикулярными сторонами можно включить в домашнее задание. Все учащиеся должны знать формулировку этой теоремы и уметь изображать на рисунке две возможные ситуации для углов с соответственно перпендикулярными сторонами. Что касается доказательства теоремы, то оно весьма объёмное (занимает целую страницу), и требование уметь его воспроизводить разумно отнести только к наиболее подготовленным учащимся. Примером использования этой теоремы служит задача 212.

При наличии времени целесообразно провести *самостоятельную работу* проверочного характера с анализом её выполнения.

Самостоятельная работа

Вариант I

1. На рисунке 60 прямые a и b параллельны, угол 2 на 34° больше угла 1. Найдите угол 3.
2. Через вершину прямого угла C треугольника ABC проведена прямая CD, параллельная стороне AB. Найдите углы A и B треугольника, если $\angle DCB = 37°$.

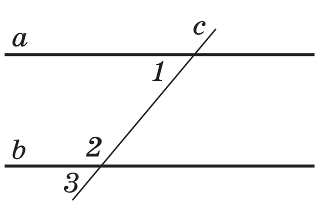

Рис. 60

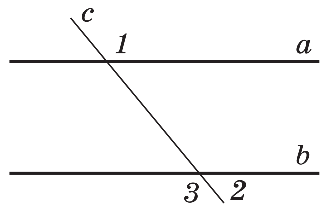

Рис. 61

Вариант II

1. На рисунке 61 прямые a и b параллельны, угол 2 в четыре раза меньше угла 1. Найдите угол 3.
2. Через вершину C треугольника CDE с прямым углом D проведена прямая CP, параллельная прямой DE. Найдите углы C и E треугольника, если $\angle PCE = 49°$.

Можно использовать также варианты самостоятельных работ С-14, С-15 и С-16 из дидактических материалов.

Дома: пп. 27—30; вопросы для повторения 7—17 (с. 66, 67); задачи 199, 201, 203 (а), 204, 207, 209, 210, 211 (а, б).

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны получить первое представление об аксиоматическом методе в геометрии; **знать и уметь формулировать** аксиому параллельных прямых, понимая при этом, что в ней идёт речь не о существовании, а о единственности прямой, проходящей через данную точку и параллельной данной прямой (существование доказывается, и учащиеся должны уметь проводить доказательство); **уметь формулировать и доказывать** следствия из аксиомы параллельных прямых, а также теоремы об углах, образованных параллельными прямыми и секущей, понимая при этом, что в первой из указанных теорем используется метод доказательства от противного; уметь приводить другие примеры теорем, где используется этот метод; **уметь формулировать** теоремы об углах с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами и изображать на рисунке возможные ситуации для таких углов; в ходе изучения пунктов 29 и 30 проявить умение работать с текстом учебника; **уметь решать задачи** типа 196, 198, 199, 201, 203—205, 209.

Решение задач *(3 ч)*

Назначение этих уроков — привести в систему знания учащихся по данной теме, добиться чёткого понимания того, когда в задаче используется признак параллельности двух прямых, а когда — свойство параллельных прямых, подготовить учащихся к предстоящей контрольной работе.

На этих уроках полезно порешать задачи по готовым чертежам.

1. На рисунке 62 $AM = AN$, $\angle MNC = 117°$, $\angle ABC = 63°$. Докажите, что $MN \parallel BC$.
2. На рисунке 63 $AD = DC$, $DE \parallel AC$, $\angle 1 = 30°$. Найдите $\angle 2$ и $\angle 3$.
3. На рисунке 64 $BD \parallel AC$, луч BC — биссектриса угла ABD, $\angle EAB = 116°$. Найдите угол BCA.
4. На рисунке 65 лучи BO и CO — биссектрисы углов B и C треугольника ABC. На сторонах AB и AC отмечены точки M и N так, что $BM = MO$, $CN = NO$. Докажите, что точки M, O и N лежат на одной прямой.

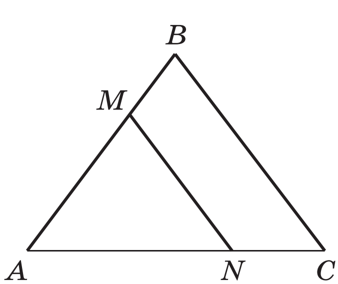

Рис. 62

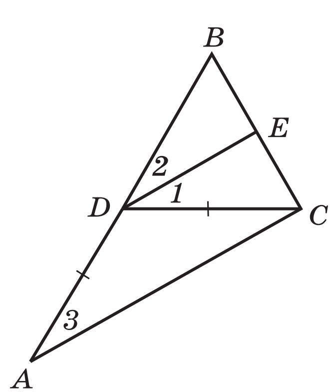

Рис. 63

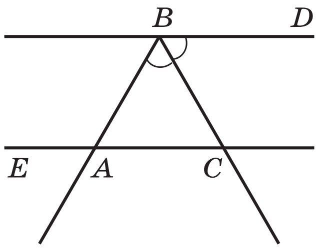

Рис. 64

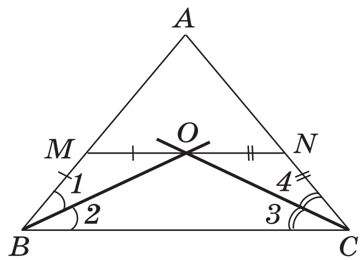

Рис. 65

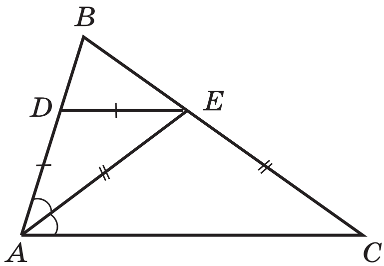

Рис. 66

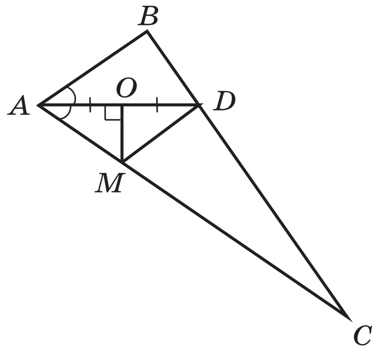

Рис. 67

5. На рисунке 66 AE — биссектриса треугольника ABC, $AD = DE$, $AE = CE$, $\angle ACB = 37°$. Найдите $\angle BDE$.
6. На рисунке 67 AD — биссектриса треугольника ABC, $AO = OD$, $MO \perp AD$. Докажите, что $MD \parallel AB$.

В классе можно решать также задачи 216, 221. На этих уроках полезно ещё раз обсудить решения задач 217, 218, 220.

Дома: задания 214, 215, 222.

Контрольная работа № 3 *(1 ч)*

Вариант I

1. Отрезки EF и PQ пересекаются в их середине — точке M. Докажите, что $PE \parallel QF$.
2. Отрезок DM — биссектриса треугольника CDE. Через точку M проведена прямая, параллельная стороне CD и пересекающая сторону DE в точке N. Найдите углы треугольника DMN, если $\angle CDE = 68°$.

Вариант II

1. Отрезки MN и EF пересекаются в их середине — точке P. Докажите, что $EN \parallel MF$.
2. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, параллельная стороне AB и пересекающая сторону AC в точке F. Найдите углы треугольника ADF, если $\angle BAC = 72°$.

Варианты III и IV предназначены для наиболее подготовленных учащихся.

Вариант III

1. Отрезок AD — биссектриса треугольника ABC. Через точку D проведена прямая, пересекающая сторону AB в точке E так, что $AE = ED$. Найдите углы треугольника AED, если $\angle BAC = 64°$.
2. На рисунке 68 $AC \parallel BD$, точка M — середина отрезка AB. Докажите, что M — середина отрезка CD.

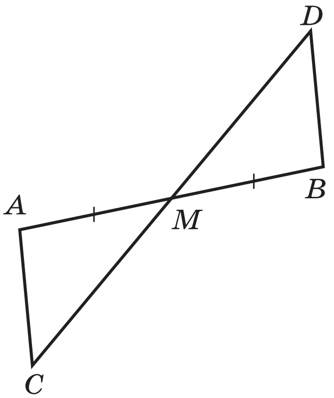

Рис. 68

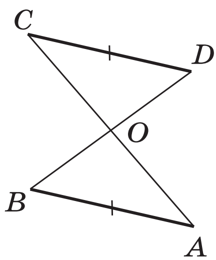

Рис. 69

Вариант IV

1. Отрезок DM — биссектриса треугольника CDE. Через точку M проведена прямая, пересекающая сторону DE в точке N так, что $DN = MN$. Найдите углы треугольника DMN, если $\angle CDE = 74°$.
2. На рисунке 69 $AB \parallel DC$, $AB = DC$. Докажите, что точка O — середина отрезков AC и BD.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты контрольной работы К-3 из дидактических материалов.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему об одном из признаков параллельности двух прямых.
2. Докажите, что прямые a и b, изображённые на рисунке 70, параллельны, если $\angle 1 = 36°$, $\angle 8 = 144°$.

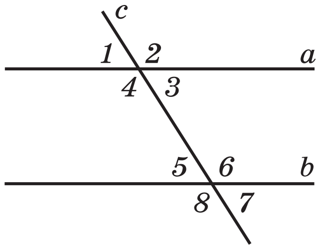

Рис. 70

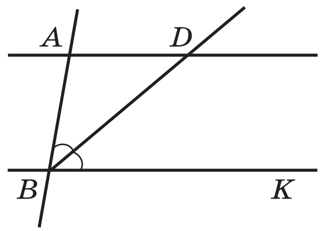

Рис. 71

3. На рисунке 71 прямые AD и BK параллельны, луч BD — биссектриса угла ABK, $\angle ABK = 80°$. Найдите углы треугольника ABD.

Вариант II

1. Сформулируйте аксиому параллельных прямых.
2. Дан треугольник CDE. Сколько прямых, параллельных стороне CE, можно провести через вершину D?
3. На рисунке 72 отрезки AB и CD пересекаются в их общей середине M. Через точку B проведена прямая a, параллельная прямой AD. Докажите, что прямая a проходит через точку C.

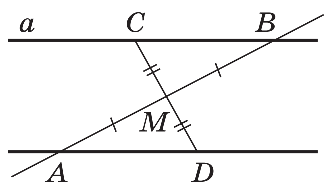

Рис. 72

Вариант III

1. Сформулируйте теорему об одном из свойств параллельных прямых.
2. На рисунке 73 прямые a и b параллельны, $\angle 2 = 132°$. Найдите $\angle 7$.

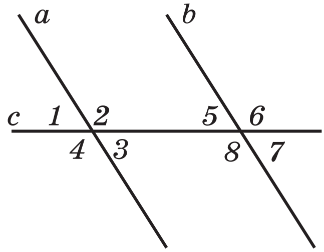

Рис. 73

3. На рисунке 74 $AB = BC$, $BF \parallel AC$. Докажите, что луч BF — биссектриса угла CBD.

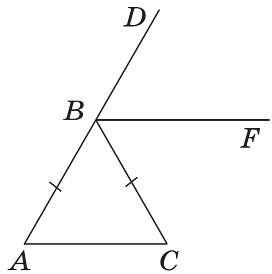

Рис. 74

Комментарии и рекомендации по решению задач главы III

206. Возможны два случая: а) точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (рис. 75); б) точки A и D лежат по разные стороны от прямой BC (рис. 76). В первом случае углы ABC и BCD односторонние при пересечении прямых AB и CD секущей BC, и так как $\angle ABC + \angle BCD = 70° + 110° = 180°$, то $AB \parallel CD$. Во втором случае углы ABC и BCD накрест лежащие при пересечении прямых AB и CD секущей BC, и так как $\angle ABC \neq \angle BCD$, то прямые AB и CD не параллельны, т. е. пересекаются.

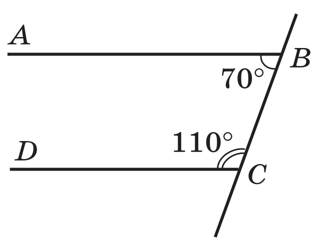

Рис. 75

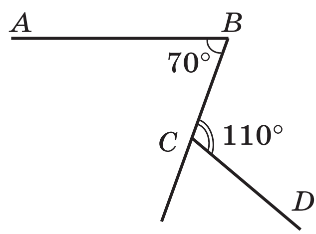

Рис. 76

218. Отметим произвольную точку, не лежащую на прямой b, и проведём через неё прямую c, параллельную прямой b. Так как прямая a пересекает прямую b, то она пересекает и прямую c. Таким образом, прямая c пересекает прямую a и параллельна прямой b.

219*. Предположим, что прямые a и b не параллельны, т. е. пересекаются. Тогда можно провести прямую c, которая пересекает прямую a и не пересекает прямую b (задача 218). Но это противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно и $a \parallel b$.

220. Пусть при пересечении двух прямых a и b секущей накрест лежащие углы 1 и 2 не равны: $\angle 1 \neq \angle 2$. Предположим, что прямые a и b параллельны. Тогда согласно свойству параллельных прямых $\angle 1 = \angle 2$, что противоречит условию задачи. Значит, наше предположение неверно и прямые a и b пересекаются.

221. Пусть O и Q — середины сторон AC и AB (рис. 77). Треугольники AOM и COB равны по двум сторонам и углу между ними, поэтому $\angle AMO = \angle CBO$, и, следовательно, прямые AM и BC параллельны. Аналогично $\triangle ANQ = \triangle BCQ$, и, значит, $AN \parallel BC$. Итак, через точку A проходят прямые AM и AN, параллельные прямой BC. Но через точку A можно провести только одну прямую, параллельную BC. Значит, прямые AM и AN совпадают, т. е. точки M, A и N лежат на одной прямой.

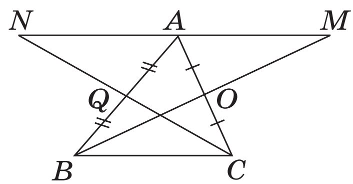

Рис. 77

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы III

В соответствии с первым вариантом тематического планирования учебного материала на изучение темы «Параллельные прямые» отводится 9 часов. Их можно распределить следующим образом:

§ 1. Признаки параллельности двух прямых	3 ч
§ 2. Аксиома параллельных прямых	3 ч
Решение задач	2 ч
Контрольная работа № 3	1 ч

Несмотря на некоторое сокращение количества часов по сравнению со вторым вариантом, учителю следует выполнить основные рекомендации по изучению теоретического материала данной главы. Вместе с тем необходимо по своему усмотрению отобрать задачи из числа рекомендованных выше для решения в классе и для домашних заданий. Для проведения контрольной работы № 3 можно использовать те же варианты заданий, что и по второму варианту планирования.

ГЛАВА IV

Соотношения между сторонами и углами треугольника *(18 ч)*

В этой главе изучаются новые интересные и важные свойства треугольников. Открывается глава одной из важнейших теорем геометрии — теоремой о сумме углов треугольника. Затем рассматриваются соотношения между сторонами и углами треугольника. По ходу изучения нового материала повторяются многие вопросы предшествующих разделов курса: свойства смежных и вертикальных углов, признаки равенства треугольников, свойства параллельных прямых и другие вопросы. Завершается глава задачами на построение треугольника по трём элементам.

Примерное поурочное планирование

Параграф главы	Число уроков	Номера задач из рабочей тетради	Дидактические материалы
§ 1. Сумма углов треугольника	2	116—129	С-17
§ 2. Соотношения между сторонами и углами треугольника	3	130—137	С-18, С-19
Контрольная работа № 4	1	—	—
§ 3. Прямоугольные треугольники	4	138—149	С-20, С-21 К-4
§ 4. Построение треугольника по трём элементам	4	150—157	С-22, С-23, С-24, С-25
Решение задач	3	116—157	—
Контрольная работа № 5	1	—	—

§ 1 Сумма углов треугольника *(2 ч)*

Назначение параграфа — доказать теорему о сумме углов треугольника и следствие из неё (о внешнем угле треугольника); ввести классификацию треугольников по углам (остроугольный, прямоугольный, тупоугольный).

Изучение темы «Сумма углов треугольника» полезно начать с решения следующей задачи:

Задача. На рисунке 78 $BD \parallel AC$. Найдите сумму углов треугольника ABC.

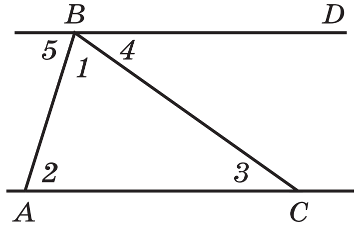

Рис. 78

Вслед за решением этой задачи перед учащимися можно поставить вопрос: случайно ли сумма углов данного треугольника ABC оказалась равной $180°$, или этим свойством обладает любой треугольник? Поиск ответа естественно приводит к формулированию теоремы о сумме углов треугольника. Доказав её, целесообразно решить устно задачи 223 (а, б, г), 225, 226. Желательно, чтобы решения задач 227 (б), 228 (а, в), 229 были записаны на доске и в тетрадях учащихся, причём задачу 228 (в) полезно рассмотреть сразу после задачи 226, так как при решении необходимо сослаться на доказанное в задаче 226 утверждение: углы при основании равнобедренного треугольника острые. Далее нужно ввести понятие внешнего угла треугольника и предложить учащимся доказать в качестве следствия из теоремы о сумме углов треугольника, что внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, а потом решить задачи 232 и 233.

Задачу 232 желательно решить под руководством учителя, так как решение этой задачи требует дополнительных построений в связи с тем, что признак равнобедренного треугольника изучается позже.

Возможная запись решения на доске и в тетрадях учащихся может быть следующей:

Дано: $\angle CBE$ — внешний угол треугольника ABC, $\angle CBE = 2\angle A$ (рис. 79).

Доказать: $\triangle ABC$ — равнобедренный.

Решение. Проведём биссектрисы BF и BD смежных углов CBE и ABC, тогда $BF \perp BD$ (см. задачу 83). $BF \parallel AC$, так как $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, а углы 1 и 3 соответственные при пересечении прямых BF и AC секущей AB. $BD \perp AC$, так как $BD \perp BF$, а $BF \parallel AC$. В треугольнике ABC биссектриса BD является высотой, следовательно, треугольник ABC равнобедренный (см. задачу 133).

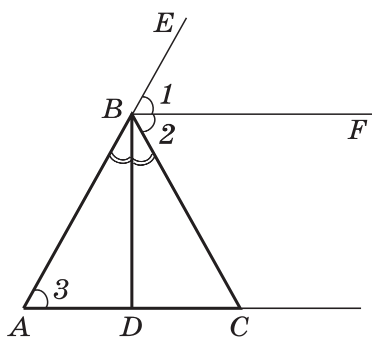

Рис. 79

Обратное утверждение также верно, а именно: если треугольник равнобедренный, то внешний угол при вершине, противолежащей основанию треугольника, в два раза больше угла при основании. Действительно, этот внешний угол равен сумме двух углов при основании равнобедренного треугольника, а так как углы при основании равны, то данный внешний угол в два раза больше угла при основании треугольника.

Перед введением классификации треугольников по углам (п. 32) полезно задать учащимся такой вопрос: «Может ли треугольник иметь: а) два прямых угла; б) два тупых угла; в) один прямой и один тупой угол?» Ответы должны быть обоснованы с помощью теоремы о сумме углов треугольника.

Из этих ответов следует вывод (следствие из теоремы о сумме углов треугольника): в любом треугольнике либо все три угла острые, либо два угла острые, а третий — тупой или прямой. Теперь можно ввести понятия остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольников и обратить внимание учащихся на названия сторон прямоугольного треугольника — гипотенуза и катет.

На одном из уроков полезно провести *самостоятельную работу* обучающего характера (на 15—20 мин).

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Один из углов равнобедренного треугольника равен $96°$. Найдите два других угла треугольника.
2. В треугольнике CDE с углом E, равным $32°$, проведена биссектриса CF, $\angle CFD = 72°$. Найдите угол D.

Вариант II

1. Один из углов равнобедренного треугольника равен $108°$. Найдите два других угла треугольника.
2. В треугольнике CDE проведена биссектриса CF, $\angle D = 68°$, $\angle E = 32°$. Найдите угол CFD.

Вариант III

1. В равнобедренном треугольнике MNP с основанием MP и углом N, равным $64°$, проведена высота MH. Найдите угол PMH.
2. В треугольнике CDE проведены биссектрисы CK и DP, пересекающиеся в точке F, причём $\angle DFK = 78°$. Найдите угол CED.

Вариант IV

1. В равнобедренном треугольнике CDE с основанием CE и углом D, равным $102°$, проведена высота CH. Найдите угол DCH.

2. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AM и BN, пересекающиеся в точке K, причём $\angle AKN = 58°$. Найдите угол ACB.

Наряду с этими вариантами можно использовать также варианты самостоятельной работы С-17 из дидактических материалов.

Дома: пп. 31—32; вопросы для повторения 1—5 (с. 88); задачи 223 (а), 227 (а), 228 (б), 230, 231, 234, 235.

Наиболее подготовленным учащимся можно предложить решить дома задачи 333, 334, 335.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** теорему о сумме углов треугольника, а также утверждение о внешнем угле треугольника, проявив при этом способность выводить (самостоятельно или с подсказкой учителя) несложные следствия из доказанных теорем; **проводить классификацию** треугольников по углам, **знать** названия сторон прямоугольного треугольника; **уметь решать задачи** типа 223—229, 234.

§ 2 Соотношения между сторонами и углами треугольника *(3 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть теоремы о соотношениях между сторонами и углами треугольника, следствия из этих теорем; показать, как они применяются при доказательстве других теорем и решении задач.

Изучение нового материала можно начать с решения следующей подготовительной задачи:

Дано: $\triangle MOC$, $M - K - C$, $KM = OM$ (рис. 80).

Доказать: а) $\angle 1 > \angle 3$; б) $\angle MOC > \angle 3$.

Доказательство. а) Треугольник OMK равнобедренный с основанием OK, поэтому $\angle 1 = \angle 2$. Угол 2 — внешний угол треугольника OKC, поэтому $\angle 2 > \angle 3$. Итак, $\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 2 > \angle 3$, следовательно, $\angle 1 > \angle 3$.

б) Так как $M - K - C$, то $\angle MOC > \angle 1$, а так как $\angle 1 > \angle 3$, то $\angle MOC > \angle 3$.

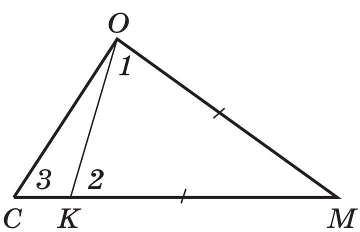

Рис. 80

Затем следует сформулировать и доказать первое утверждение теоремы (в треугольнике против большей стороны лежит больший угол) и решить устно задачу 236. Перед доказательством второго утверждения теоремы (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона) полезно напомнить учащимся, какая теорема называется обратной данной, и предложить привести примеры обратных теорем, изученных ранее. После этого целесообразно дать им возможность самостоятельно сформулировать утверждение, обратное первому утверждению. На классной доске и в тетрадях учащихся желательно сделать следующую запись:

	Теорема	Обратная теорема
Дано (условие)	$\triangle ABC$, $AB > AC$	$\triangle ABC$, $\angle ACB > \angle ABC$
Доказать (заключение)	$\angle ACB > \angle ABC$	$AB > AC$

Доказательство обратного утверждения проводится методом от противного. В связи с этим, после того как сформулирована обратная теорема, записаны её условие и заключение, полезно вспомнить, что при сравнении двух отрезков, например отрезков CD и EF, возможен один и только один из трёх случаев: $CD > EF$, $CD = EF$, $CD < EF$. Поэтому, если мы предполагаем, что отрезок CD не больше отрезка EF, то возможны два случая: либо $CD = EF$, либо $CD < EF$.

После этих предварительных рассуждений учащимся легче понять, почему при доказательстве теоремы, предположив, что AB не больше AC, мы рассматриваем два возможных случая: либо $AB = AC$, либо $AB < AC$.

Далее можно решить устно задачу 237.

При наличии времени полезно решить также следующие задачи:

1. В треугольнике ABC угол C тупой, K — произвольная точка на стороне AC. Докажите, что $BK < AB$.
2. В треугольнике ABC на стороне AC отмечена точка D так, что $DC = BC$. Докажите, что $\angle B > \angle$ A.

Следствие 1 учащиеся могут доказать самостоятельно, а затем можно решить задачу 239.

На следствие 2, выражающее признак равнобедренного треугольника, следует обратить особое внимание, так как этот признак часто используется в дальнейшем при доказательстве теорем и решении задач.

На применение признака равнобедренного треугольника рекомендуется решить задачи 240, 241, 242, 243, 247.

Решение задачи 243 полезно записать на доске, с тем чтобы учащиеся перенесли его в свои тетради.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $\triangle ABC$, AA_1 — биссектриса, $CD \parallel AA_1$, $D \in AB$ (рис. 81).

Доказать: $AC = AD$.

Решение. $\angle 1 = \angle 2$, так как AA_1 — биссектриса треугольника ABC.

$\angle 1 = \angle 4$ как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AA_1 и CD и секущей AC.

$\angle 2 = \angle 3$ как соответственные углы при пересечении параллельных прямых AA_1 и CD и секущей AD.

Из равенств $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 = \angle 3$ следует, что $\angle 3 = \angle 4$, а потому $AC = AD$.

При наличии времени можно решить следующую задачу:

Задача. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 10 см. Найдите отрезок CD, если A — D — B и $BD = CD$.

Возможное оформление решения задачи

Дано: $\triangle ABC$, $\angle C = 90°$, $AB = 10$ см, A — D — B (рис. 82), $BD = CD$.

Найти: CD.

Решение. $\angle B = \angle 2$, так как по условию $CD = BD$. $\angle 1 + \angle 2 = 90°$, $\angle B + \angle A = 90°$, но $\angle 2 = \angle B$, поэтому $\angle A = \angle 1$ и треугольник ADC равнобедренный: $AD = CD$.

Итак, $CD = BD$ по условию, $AD = CD$ по доказанному, следовательно, $CD = \frac{1}{2}AB = 5$ см.

На одном из уроков рекомендуется провести *самостоятельную работу* обучающего характера (на 15—20 мин).

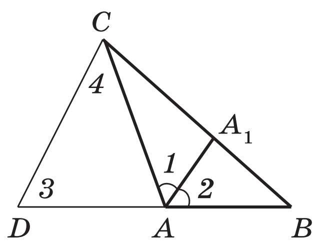

Рис. 81

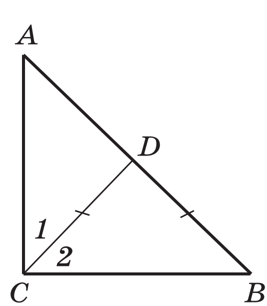

Рис. 82

Самостоятельная работа

Вариант I

В треугольнике ABC проведена биссектриса BD, $\angle A = 75°$, $\angle C = 35°$.

а) Докажите, что треугольник BDC равнобедренный.

б) Сравните отрезки AD и DC.

Вариант II

В треугольнике CDE проведена биссектриса EF, $\angle C = 90°$, $\angle D = 30°$.

а) Докажите, что треугольник DEF равнобедренный.

б) Сравните отрезки CF и DF.

Можно использовать также варианты самостоятельной работы С-18 из дидактических материалов.

После рассмотрения теоремы о неравенстве треугольника рекомендуется в классе решить задачи 248, 249, 250 (а), 253. Решение задачи 253 можно записать следующим образом:

Решение. 1) Пусть внешний угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC острый, тогда угол BAC тупой. Следовательно, BC — основание треугольника, а потому $\angle B = \angle C$ и $AB = AC$.

2) $BC > AB$ и $BC > AC$, так как против тупого угла лежит бо́льшая сторона треугольника. Поэтому, учитывая условия задачи, имеем $BC - AB = 4$ см.

3) $AB + AC + BC = 25$ см, или $2AB + BC = 25$ см. Но $BC = AB + 4$ см, следовательно, $3AB + 4$ см $= 25$ см, откуда $AB = 7$ см, $BC = 11$ см, $AC = 7$ см.

При наличии времени можно провести *самостоятельную работу* с вариантами С-19 из дидактических материалов.

Перед предстоящей контрольной работой рекомендуется выделить один урок для решения задач, на котором целесообразно рассмотреть задачи 246, 296, 297, 298 учебника, а также следующую задачу:

Задача. Отрезок EK — биссектриса треугольника DEC. Докажите, что $KC < EC$.

Возможная запись решения

Угол EKC — внешний угол треугольника DKE (рис. 83), поэтому он больше угла 1 и, следовательно, больше угла 2, так как $\angle 1 = \angle 2$. Так как $\angle EKC > \angle 2$, то $EC > KC$ (по теореме о соотношениях между сторонами и углами треугольника).

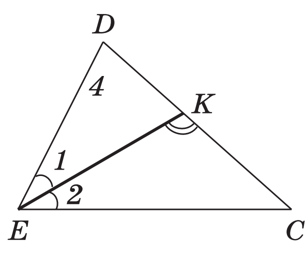

Рис. 83

Дома: пп. 33—34; вопросы для повторения 6—9 (с. 88); задачи 238, 244, 245, 250 (б, в), 251, 252. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 299, 300.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** теорему о соотношениях между сторонами и углами треугольника, теорему о неравенстве треугольника, следствия из этих теорем; **уметь приводить примеры** прямой и обратной теорем, а также примеры, когда обратное утверждение не имеет места; **уметь решать задачи** типа 236—240, 243, 244, 248—250.

Контрольная работа № 4 *(1 ч)*

Вариант I

1. На рисунке 84 $\angle ABE = 104°$, $\angle DCF = 76°$, $AC = 12$ см. Найдите сторону AB треугольника ABC.
2. В треугольнике CDE точка M лежит на стороне CE, причём угол CMD острый. Докажите, что $DE > DM$.
3. Периметр равнобедренного тупоугольного треугольника равен 45 см, а одна из его сторон больше другой на 9 см. Найдите стороны треугольника.

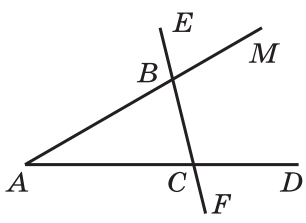

Рис. 84

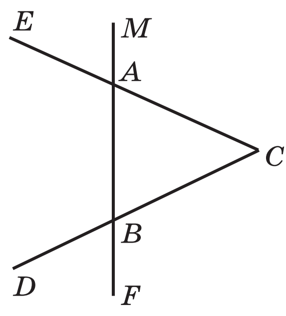

Рис. 85

Вариант II

1. На рисунке 85 $\angle BAE = 112°$, $\angle DBF = 68°$, $BC = 9$ см. Найдите сторону AC треугольника ABC.
2. В треугольнике MNP точка K лежит на стороне MN, причём угол NKP острый. Докажите, что $KP < MP$.
3. Одна из сторон тупоугольного равнобедренного треугольника на 17 см меньше другой. Найдите стороны этого треугольника, если его периметр равен 77 см.

Варианты III и IV предназначены для более подготовленных учащихся.

Вариант III

1. На рисунке 84 $\angle CBM = \angle ACF$, $P_{ABC} = 34$ см, $BC = 12$ см. Найдите сторону AC треугольника ABC.
2. В треугольнике MNK $\angle K = 37°$, $\angle M = 69°$, отрезок NP — биссектриса треугольника. Докажите, что $MP < PK$.
3. Периметр равнобедренного треугольника равен 45 см, а одна из его сторон больше другой на 12 см. Найдите стороны треугольника.

Вариант IV

1. На рисунке 85 $\angle EAM = \angle DBF$, $BC = 17$ см, $P_{ABC} = 45$ см. Найдите сторону AB треугольника ABC.
2. В треугольнике CDE $\angle E = 76°$, $\angle D = 66°$, EK — биссектриса треугольника. Докажите, что $KC > DK$.
3. Периметр равнобедренного треугольника равен 50 см, а одна из его сторон на 13 см меньше другой. Найдите стороны треугольника.

§ 3 Прямоугольные треугольники *(4 ч)*

Назначение параграфа — рассмотреть некоторые свойства прямоугольных треугольников, признаки их равенства и показать, как они применяются при решении задач.

Изучение п. 35 «Некоторые свойства прямоугольных треугольников» можно начать с решения задач 254 и 255. После этого следует рассмотреть утверждение 1^0 и посоветовать учащимся запомнить его, поскольку оно часто используется при решении задач. Использование этого утверждения можно показать на примере задачи 265. Доказательства утверждений 2^0 и 3^0 следует провести учителю самому с записью условия и заключения прямого и обратного утверждений на доске в виде таблицы. Эту таблицу учащиеся должны воспроизвести в своих тетрадях.

	Теорема	Обратная теорема
Дано (условие)	$\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $\angle B = 30°$	$\triangle ABC$, $\angle A = 90°$, $AC = 0{,}5\,BC$
Доказать (заключение)	$AC = 0{,}5\,BC$	$\angle B = 30°$

Затем рекомендуется решить задачи 257, 259, 260. Перед рассмотрением признаков равенства прямоугольных треугольников полезно повторить признаки равенства треугольников, изложенные в главе II, и решить задачу 132, а также следующую задачу:

Задача. Гипотенузы BD и AC прямоугольных треугольников ABD и ABC с общим катетом AB и с равными катетами AD и BC пересекаются в точке O (рис. 86). Докажите, что треугольник AOB равнобедренный.

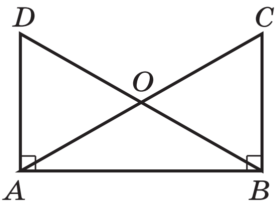

Рис. 86

Желательно, чтобы учащиеся самостоятельно доказали теоремы о признаках равенства прямоугольных треугольников по двум катетам, по катету и прилежащему острому углу, по гипотенузе и острому углу. На применение признака равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу можно решить задачи 261, 263.

На доказательство теоремы о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету следует обратить особое внимание. Если предыдущие теоремы о признаках доказываются весьма просто, то доказательство этой теоремы требует дополнительных построений и непростых логических рассуждений. После того как учитель сам проведёт доказательство теоремы о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету, можно решить задачу 267 на применение рассмотренного признака. Затем можно предложить учащимся самостоятельно сформулировать и доказать утверждение о признаке равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу (задача 268) и решить задачу 269 на применение этого признака.

На уроках по решению задач по теме «Прямоугольные треугольники» полезно провести устную работу по чертежам.

1. На рисунке 87 $\angle B = \angle C = 90°$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB = CD$.
2. На рисунке 88 $AB = CD$, $BC = AD$, $\angle AFB = \angle CED = 90°$. Докажите, что $BF = ED$, $AF = EC$.

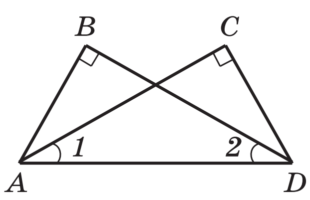

Рис. 87

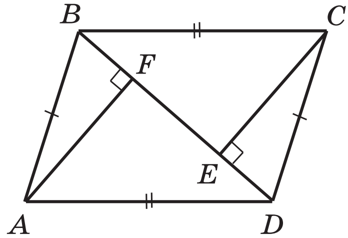

Рис. 88

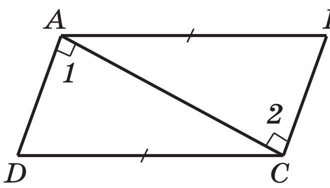

Рис. 89

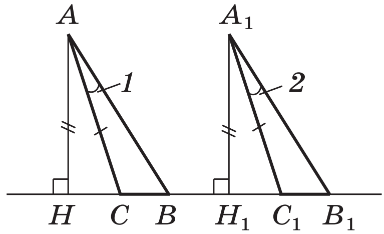

Рис. 90

3. На рисунке 89 $\angle 1 = \angle 2 = 90°$, $AB = DC$. Докажите, что $BC = AD$.
4. На рисунке 90 AH и A_1H_1 — высоты треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle 1 = \angle 2$, $AH = A_1H_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

На одном из уроков целесообразно провести *самостоятельную работу* проверочного характера (на 20 мин).

Самостоятельная работа

Вариант I

1. На рисунке 91 $AD = DC$, $ED = DF$, $\angle 1 = \angle 2 = 90°$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
2. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 18 см. Найдите гипотенузу и меньший катет.

Вариант II

1. На рисунке 92 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 = 90°$, $BD = DC$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
2. Один из острых углов прямоугольного треугольника в два раза меньше другого, а разность гипотенузы и меньшего катета равна 15 см. Найдите гипотенузу и меньший катет.

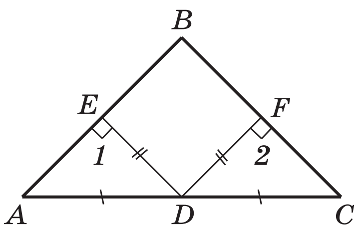

Рис. 91

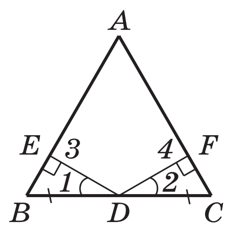

Рис. 92

Варианты III и IV предназначены для более подготовленных учащихся.

Вариант III

1. Через середину отрезка AB проведена прямая a. Из точек A и B к прямой a проведены перпендикуляры AC и BD. Докажите, что $AC = BD$.
2. В прямоугольном треугольнике CDE с прямым углом E проведена высота EF. Найдите CF и FD, если $CD = 18$ см, а $\angle DCE = 30°$.

Вариант IV

1. Из точки M биссектрисы неразвёрнутого угла O проведены перпендикуляры MA и MB к сторонам этого угла. Докажите, что $MA = MB$.
2. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB и углом A, равным $60°$, проведена высота CH. Найдите BH, если $AH = 6$ см.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельных работ С-20, С-21 и контрольной работы К-4 из дидактических материалов.

При наличии времени желательно на одном из уроков под руководством учителя решить задачу 270. На неё следует обратить особое внимание, так как эта задача является одной из первых задач на построение, в которой анализ даёт ключ к решению.

Пункт 37 «Уголковый отражатель» можно предложить прочитать самостоятельно тем, кто проявляет интерес к геометрии и её приложениям.

Дома: пп. 35—36; вопросы для повторения 10—13 (с. 88—89); задачи 256, 258, 262, 264, 266.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь формулировать и доказывать** утверждения 1^0—3^0 о свойствах прямоугольных треугольников, а также теоремы о признаках равенства прямоугольных треугольников; в ходе изучения нового материала **формировать способность** самостоятельно **находить способы доказательства** новых утверждений на основе накопленных геометрических знаний; **уметь решать задачи** типа 254—260, 263, 265.

§ 4 Построение треугольника по трём элементам *(4 ч)*

Назначение параграфа — ввести понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми и рассмотреть некоторые утверждения, связанные с этими понятиями; ввести понятие геометрического места точек.

На первом уроке рекомендуется рассмотреть понятия расстояния от точки до прямой и расстояния между параллельными прямыми.

Перед тем как ввести понятие наклонной, полезно вспомнить, как вводилось понятие перпендикуляра, проведённого из данной точки к данной прямой. Для усвоения понятия расстояния от точки до прямой рекомендуется решить задачи 271, 275, 276. Затем следует разобрать доказательство теоремы, выражающей одно из важнейших свойств параллельных прямых: все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.

После доказательства теоремы нужно ввести понятие расстояния между параллельными прямыми и решить задачи 278, 281, 282. В замечании 1 на с. 82 учебника сформулировано утверждение, обратное доказанной теореме. Учащимся предложено доказать его самостоятельно. Самостоятельный поиск доказательства можно включить в домашнее задание, а в классе следует ознакомиться с замечанием 2, в котором сформулировано и доказано следствие из доказанной теоремы и обратной ей. Это следствие приводит к понятию геометрического места точек и даёт конкретный пример, иллюстрирующий это понятие. Можно предложить учащимся привести другие примеры геометрических мест точек. Одним из таких примеров является окружность. Можно поставить перед учащимися вопрос: окружность — это геометрическое место точек, удовлетворяющих какому условию?

Полезно также обратить внимание учащихся на последний абзац п. 38 учебника, где говорится о рейсмусе — столярном инструменте, принцип действия которого связан с рассмотренными утверждениями о параллельных прямых.

Следующие уроки нужно посвятить решению трёх основных задач на построение треугольника с помощью циркуля и линейки: а) по двум сторонам и углу между ними; б) по стороне и двум прилежащим к ней углам; в) по трём сторонам (п. 39).

Полезно напомнить учащимся, что значит решить задачу на построение с помощью циркуля и линейки, можно рассказать о том, что обычно задачи на построение решаются по схеме, состоящей из четырёх частей: 1) анализ; 2) построение; 3) доказательство; 4) исследование (описание схемы содержится в разделе «Задачи повышенной трудности к главам III и IV»).

Вместе с тем учителю нужно иметь в виду, что в 7 классе, как правило, следует ограничиться только выполнением и описанием построения. В отдельных случаях можно провести устно анализ и доказательство, а элементы исследования должны присутствовать лишь тогда, когда это оговорено условием задачи.

В классе рекомендуется решить задачи 284, 286, 289, 290, 291 (в), 292, 293.

Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 303, 304, 305, 311, 313, 316, 317.

На одном из уроков полезно провести *самостоятельную работу* проверочного характера (на 20—25 мин).

Самостоятельная работа

Вариант I

1. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему острому углу.
2. Даны отрезки PQ и P_1Q_1 и угол hk. Постройте треугольник CDE так, чтобы $CE = PQ$, $\angle C = \angle hk$, $CF = P_1Q_1$, где CF — высота треугольника.

Вариант II

1. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и медиане, проведённой к основанию.
2. Даны отрезки PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте треугольник EKF так, чтобы $EF = PQ$, $KF = P_1Q_1$, $FD = P_2Q_2$, где FD — высота треугольника.

Наряду с этими вариантами можно использовать варианты самостоятельных работ С-23, С-24 и С-25 из дидактических материалов.

Дома: пп. 38—39; вопросы для повторения 14—22 (с. 89); задачи 273, 274, 277, 280, 283, 285, 287, 288, 290, 291 (а, б, г). Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 294, 295.

Основные требования к учащимся

В результате изучения параграфа учащиеся должны **уметь объяснить**, какой отрезок называется наклонной, проведённой из данной точки к данной прямой, что называется расстоянием от точки до прямой и расстоянием между двумя параллельными прямыми; **уметь доказывать**, что перпендикуляр, проведённый из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведённой из той же точки к этой прямой; теорему о том, что все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой; **уметь объяснить**, что такое геометрическое место точек, и **приводить** аргументированные **примеры** геометрических мест точек; **уметь строить** треугольник по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам, по трём сторонам; **уметь решать задачи** типа 271, 273, 277, 278 (а), 283, 284, 288, 290, 291.

Решение задач *(3 ч)*

Назначение этих уроков — закрепить в процессе решения задач усвоение изученного материала по теме «Прямоугольные треугольники», продолжить формирование навыков в решении задач на построение.

На этих уроках в классе желательно решить задачи 301, 302, 308, 310, 314 (б, в), 315 (а, ж, з), 318. Наиболее подготовленным учащимся можно предложить задачи 319, 320, 321.

При наличии времени можно решить также следующую задачу:

Задача. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и внешнему углу при вершине острого угла.

Решение. Начертим данные отрезок PQ и угол hk (рис. 93).

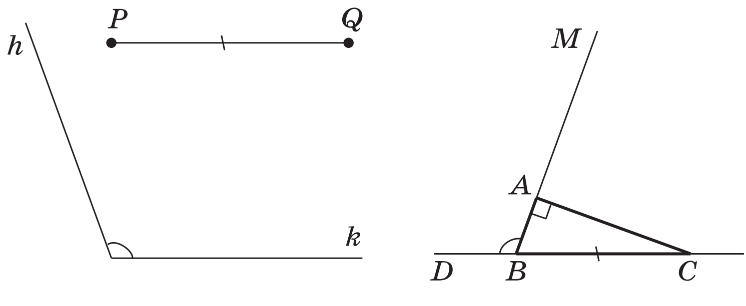

Рис. 93

Построение. 1. Проведём прямую, отметим на ней точку B и отложим отрезок BC, равный PQ.

2. Отложим от луча BD, являющегося продолжением луча BC, угол DBM, равный углу hk.

3. Построим прямую, проходящую через точку C и перпендикулярную к прямой BM, и обозначим буквой A точку пересечения этой прямой с лучом BM. Треугольник ABC искомый.

Доказательство (устно). По построению треугольник ABC прямоугольный, гипотенуза BC равна данному отрезку PQ и внешний угол ABD треугольника равен данному углу hk. Таким образом, построенный треугольник ABC удовлетворяет всем условиям задачи.

Следует обратить внимание учащихся на то, что задача имеет решение только в том случае, когда данный угол hk тупой. Желательно, чтобы учащиеся сами обосновали справедливость этого утверждения.

Дома: задачи 307, 314 (а), 315 (в, г, д, е, и).

Контрольная работа № 5 *(1 ч)*

Вариант I

1. В остроугольном треугольнике MNP биссектриса угла M пересекает высоту NK в точке O, причём $OK = 9$ см. Найдите расстояние от точки O до прямой MN.
2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и острому углу.

Дополнительное задание

С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный $150°$.

Вариант II

1. В прямоугольном треугольнике DCE с прямым углом C проведена биссектриса EF, причём $FC = 13$ см. Найдите расстояние от точки F до прямой DE.
2. Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.

Дополнительное задание

С помощью циркуля и линейки постройте угол, равный $105°$.

Примерные варианты карточек для устного опроса учащихся

Вариант I

1. Сформулируйте теорему о сумме углов треугольника.
2. Один из углов при основании равнобедренного треугольника равен $65°$. Найдите остальные углы треугольника.
3. В треугольнике ABC $\angle B = 110°$, биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите угол AOC.

Вариант II

1. Сформулируйте утверждение о свойстве катета прямоугольного треугольника, лежащего против угла в $30°$.

2. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB = 15$ см. Найдите BC.
3. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 42 см. Найдите гипотенузу.

Вариант III

1. Сформулируйте теорему о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle B = \angle B_1 = 90°$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$. Найдите углы A_1 и C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle A = 34°$, $\angle C = 54°$.
3. На сторонах угла A отмечены точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены прямые, перпендикулярные соответственно к сторонам AB и AC данного угла и пересекающиеся в точке M. Докажите, что $MB = MC$.

Вариант IV

1. Сформулируйте теорему о признаке равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы B и B_1 прямые, $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$. Найдите стороны B_1C_1 и A_1B_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $BC = 17$ см, $AB = 12$ см.
3. Даны два равных прямоугольных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle B = \angle B_1 = 90°$, $\angle A = \angle A_1$, BH и B_1H_1 — высоты. Докажите, что $\triangle BHC = \triangle B_1H_1C_1$.

Вариант V

1. Что называется расстоянием от точки до прямой?
2. Начертите прямую a и отметьте точку M на расстоянии 3,5 см от неё. Постройте наклонные из точки M к прямой a длиной 6 см и 8,5 см. (При построении используйте чертёжный угольник, циркуль, масштабную линейку.)
3. Даны два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle A = \angle A_1$, а углы B и B_1 тупые. Докажите, что расстояния от вершин A и A_1 соответственно до прямых BC и B_1C_1 равны.

Комментарии и рекомендации по решению задач главы IV

279*. Пусть точка A удалена от прямой a на расстояние h. Проведём через точку A прямую d, параллельную прямой a (рис. 94).

По теореме п. 38 все точки прямой d удалены от прямой a на расстояние h. Если же точка M лежит по ту же сторону от прямой a, что и точка A, но не лежит на прямой d, то расстояние от точки M до прямой a не равно h. В самом деле, проведём через точку M прямую, перпендикулярную к прямой a и пересекающую её в точке M_1 (см. рис. 94). Она пересекает и прямую d (так как $a \parallel d$) в некоторой точке M_2. Точки M и M_2 не совпадают, поэтому $M_1M \neq M_1M_2$, т. е. $M_1M \neq h$. Следовательно, все точки плоскости, расположенные по одну сторону от прямой a и удалённые от неё на данное расстояние h, лежат на прямой d, параллельной прямой a.

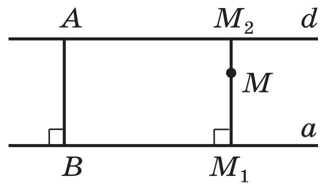

Рис. 94

294. Даны три отрезка P_1Q_1, P_2Q_2 и P_3Q_3. Требуется построить треугольник ABC так, чтобы $AB = P_1Q_1$, $AC = P_2Q_2$, $CH = P_3Q_3$, где CH — высота треугольника ABC.

Построим отрезок $AB = P_1Q_1$ и проведём прямую p, параллельную прямой AB, так, чтобы расстояние между прямыми AB и p было равно P_3Q_3 (задача 284). Вершина C треугольника ABC лежит на прямой p. Для построения точки C проведём окружность с центром A радиуса P_2Q_2. Точка пересечения этой окружности с прямой p — искомая точка C.

Задача не имеет решения, если $P_2Q_2 > P_3Q_3$.

299. При решении этой задачи удобно обозначить величину угла A буквой x и ввести цифровые обозначения для углов, как показано на рисунке 95.

Итак, $\angle A = x$, поэтому $\angle 1 = \angle A = x$, $\angle 2 = 2x$ (как внешний угол треугольника APQ), $\angle 4 = \angle 2 = 2x$, $\angle 3 = 180° - (\angle 2 + \angle 4) = 180° - 4x$, $\angle 5 = 180° - (\angle 1 + \angle 3) = 3x$, $\angle 6 = \angle 5 = 3x$. Далее, $\angle 7 = \angle B - \angle 6$, но $\angle B = \angle C = \dfrac{180° - x}{2}$, поэтому $\angle 7 = \dfrac{180° - x}{2} - 3x = \dfrac{180° - 7x}{2}$. Так как $\angle 8 = \angle C$, то $\angle C + \angle 8 + \angle 7 = 2\angle C + \angle 7 = 180°$, или $180° - x + \dfrac{180° - 7x}{2} = 180°$. Отсюда получаем, что $x = 20°$. Итак, $\angle A = 20°$.

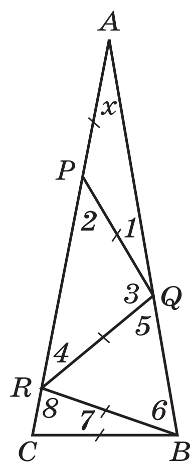

Рис. 95

300. Пусть ABC — тупоугольный треугольник с тупым углом A

(рис. 96). Предположим, что основание H высоты AH лежит не на стороне BC, а на продолжении этой стороны, например на луче BD (см. рис. 96). Тогда получим, что внешний угол ABC треугольника ABH острый, а угол AHB этого треугольника прямой, т. е. внешний угол треугольника меньше угла треугольника, несмежного с этим внешним углом. Но это невозможно. Поэтому точка H не может лежать на продолжении стороны BC. Точка H не может также совпадать с точкой B, так как тогда угол ABC прямой, а он по условию острый. Следовательно, точка H лежит на стороне BC.

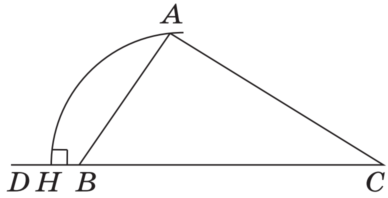

Рис. 96

Аналогично можно доказать, что основания высот, проведённых из вершин острых углов тупоугольного треугольника, лежат на продолжениях сторон.

303*. Через точку A проведём перпендикуляр AO к прямой a (дороге) и отметим на прямой AO точку A_1 так, чтобы $OA = OA_1$ (рис. 97). Пусть отрезок A_1B пересекает прямую a в точке C. Точка C и есть искомая точка. Действительно, так как $CA = CA_1$, то $AC + CB = A_1C + CB = A_1B$, а для любой другой точки M прямой a имеем $AM + MB = A_1M + MB > A_1B$ (неравенство треугольника). Таким образом, для точки C сумма $AC + CB$ наименьшая.

311. Проведём биссектрисы углов, образованных при пересечении двух прямых OA и OB (рис. 98). Возьмём произвольную точку C на одной из биссектрис и докажем, что она равноудалена от прямых OA и OB, т. е. докажем, что $CD = CE$. В самом деле, прямоугольные треугольники

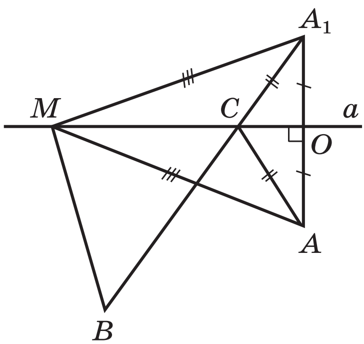

Рис. 97

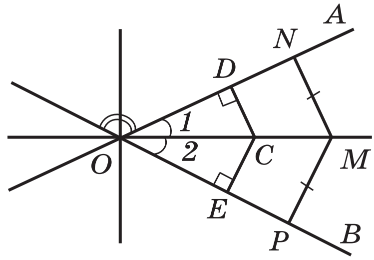

Рис. 98

ODC и OEC равны по гипотенузе (OC — общая гипотенуза) и острому углу ($\angle 1 = \angle 2$), поэтому $CD = CE$. Докажем теперь, что любая точка M, расположенная внутри угла AOB и равноудалённая от сторон OA и OB, лежит на биссектрисе этого угла. Для этого проведём перпендикуляры MN и MP к прямым OA и OB и рассмотрим прямоугольные треугольники ONM и OPM. Они равны по катету и гипотенузе (OM — общая гипотенуза, $MN = MP$, так как по условию точка M равноудалена от сторон OA и OB), поэтому $\angle NOM = \angle POM$, т. е. луч OM — биссектриса угла AOB. Из доказанных утверждений следует, что искомое множество точек состоит из двух прямых, содержащих биссектрисы углов, образованных при пересечении данных прямых.

316. Допустим, что треугольник с данными стороной AB, высотой CH и медианой AM построен (рис. 99). Проведём через точку C прямую a, параллельную прямой AB, и продолжим медиану AM до пересечения с прямой a в точке D. Согласно задаче 282 точка M — середина отрезка AD. Из проведённого анализа вытекает следующий способ построения искомого треугольника ABC. Строим две параллельные прямые, отстоящие друг от друга на расстоянии, равном данной высоте треугольника. На одной из прямых отмечаем точку A и откладываем отрезок AB, равный данной стороне треугольника. Строим окружность с центром A и радиусом, вдвое большим данной медианы треугольника. Пусть D — точка пересечения окружности и второй прямой. Далее строим середину M отрезка AD и проводим прямую BM до пересечения со второй из параллельных прямых в точке C. Треугольник ABC искомый.

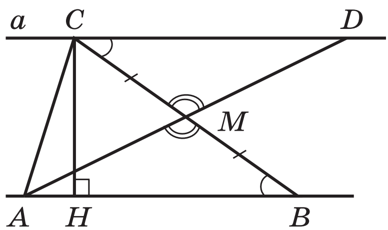

Рис. 99

О первом варианте тематического планирования учебного материала главы IV

Согласно первому варианту тематического планирования учебного материала на изучение темы «Соотношения между сторонами и углами треугольника» отводится 16 часов, т. е. почти столько же, сколько и по второму варианту. Поэтому рекомендации по проведению уроков, данные выше, могут быть полностью использованы и здесь.

Повторение. Решение задач *(10 ч)*

На уроках, которые отводятся на решение задач и повторение всего учебного материала курса геометрии 7 класса, полезно сконцентрировать внимание учащихся на следующих узловых вопросах курса:

Измерение отрезков и углов; перпендикулярные прямые	2 ч
Треугольники: признаки равенства треугольников, равнобедренные треугольники, сумма углов треугольника, соотношения между сторонами и углами треугольника, прямоугольные треугольники	4 ч
Параллельные прямые	2 ч
Задачи на построение: основные построения, построение треугольника по трём элементам	2 ч

На уроках повторения следует систематизировать сведения об основных свойствах геометрических фигур, повторить доказательства отдельных наиболее важных теорем. При этом могут быть использованы заранее подготовленные карточки для устного опроса, составленные по материалу каждой главы.

Целесообразно не менее половины каждого урока отводить на решение задач. Рекомендуется использовать следующие задачи учебника: 33, 36, 61, 65, 70, 82, 83, 156, 162, 170, 172, 193, 204, 208, 244, 259, 269, 286, 291, 294. Отдельным ученикам, которые проявляют особый интерес к изучению геометрии, можно предложить некоторые из задач повышенной трудности (задачи 322—362), в частности те задачи, решения которых даны в этом пособии.

На одном из последних уроков можно провести *итоговую контрольную работу* по вариантам К-5 из дидактических материалов.

Согласно первому варианту тематического планирования учебного материала на решение задач и заключительное повторение всего курса геометрии 7 класса отводится 4 часа.

Комментарии и рекомендации по решению задач повышенной трудности

322. Пусть отрезок CD принят за единицу измерения, тогда $CD = 1$, $AB = a$. Если AB — новая единица измерения, то $AB = 1$, $CD = b$. При переходе от единицы измерения CD к единице измерения AB числа, выражающие длины всех отрезков, умножаются на одно и то же число, которое обозначим через k. Тогда $1 \cdot k = b$, $a \cdot k = 1$. Отсюда следует, что $ab = 1$.

326. Пусть a_1 и a_2 — две из данных шести прямых, которые пересекаются в точке A. Через точку A по условию проходит по крайней мере ещё одна из данных прямых, которую обозначим a_3 (рис. 100). Докажем, что оставшиеся три прямые также проходят через точку A. Допустим, что какая-то из них, например прямая a_4, не проходит через точку A. Эта прямая по условию задачи пересекает прямые a_1, a_2, a_3. Обозначим точки пересечения A_1, A_2, A_3.

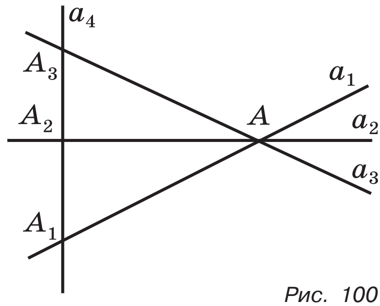

Рис. 100

Точки A, A_1, A_2, A_3 — попарно различные точки. Через каждую из трёх точек A_1, A_2, A_3 должна проходить по крайней мере ещё одна прямая из данных прямых, отличная от прямых a_1, a_2, a_3, a_4. Но это невозможно, так как дано всего шесть прямых. Таким образом, наше предположение неверно, и, следовательно, все прямые проходят через точку A.

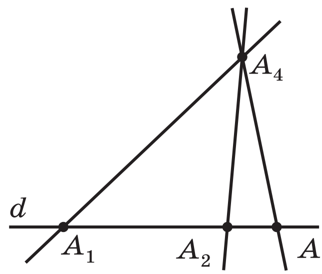

Рис. 101

327. Пусть A_1 и A_2 — две из данных шести точек, а d — прямая A_1A_2 (рис. 101). На прямой d по условию задачи лежит по крайней мере ещё одна из данных точек, которую обозначим A_3. Докажем, что оставшиеся три точки также лежат на прямой d. Допустим, что какая-то из них, например точка A_4, не лежит на прямой d. Тогда прямые d, A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 — попарно различные прямые. На каждой из трёх прямых A_1A_4, A_2A_4, A_3A_4 должна лежать по крайней мере ещё одна из данных точек, отличная от точек A_1, A_2, A_3, A_4. Но это невозможно, так как дано всего шесть точек. Мы пришли к противоречию, и, следовательно, все шесть данных точек лежат на прямой d.

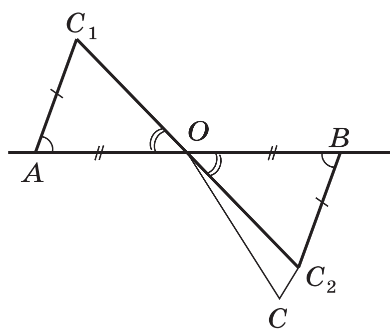

Рис. 102

328. Пусть точка O — середина отрезка AB (рис. 102). $\triangle AOC_1 = \triangle BOC_2$ по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $\angle AOC_1 = \angle BOC_2$. Докажем, что точки O, C_1 и C_2 лежат на одной прямой. Для этого рассмотрим луч OC — продолжение луча OC_1. Так как $\angle AOC_1 = \angle BOC$ (как вертикальные углы) и $\angle AOC_1 = \angle BOC_2$ по доказанному, то лучи OC и OC_2 совпадают, поэтому точки C_1, C_2 и O лежат на одной прямой, и, значит, прямая C_1C_2 проходит через точку O — середину отрезка AB.

329. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $AC = A_1C_1$ и $AB + BC = A_1B_1 + B_1C_1$ (рис. 103). Продолжим стороны AB и A_1B_1 на отрезки $BD = BC$ и $B_1D_1 = B_1C_1$. Рассмотрим треугольники ADC и $A_1D_1C_1$. Эти треугольники равны по двум сторонам ($AC = A_1C_1$, $AD = A_1D_1$) и углу между ними ($\angle A = \angle A_1$), поэтому $DC = D_1C_1$ и $\angle D = \angle D_1$. Так как DBC и $D_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники с равными основаниями и равными углами при основании, то они равны, поэтому $BD = B_1D_1$. Из равенств $AD = A_1D_1$ и $BD = B_1D_1$ следует, что $AB = A_1B_1$, и, следовательно, треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними.

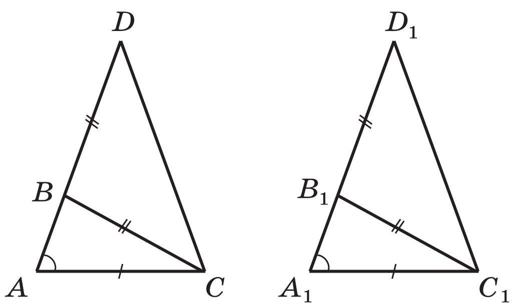

Рис. 103

337. Пусть O — точка пересечения биссектрисы AA_1 треугольника ABC с прямой BM. Введём цифровые обозначения для углов, как показано на рисунке 104. Согласно условию задачи $\angle 7 = \frac{1}{2}\angle A = 40°$, $\angle B = \angle C = 50°$, $\angle 1 = 30°$, $\angle 2 = 10°$, $BC \perp AA_1$, поэтому $\angle 5 = \angle 6 = 60°$.

Докажем сначала, что $\triangle AOC = \triangle MOC$. У этих треугольников OC — общая сторона, и прилежащие к ней углы равны. В самом деле, $\angle AOC = 180° - \angle 6 = 120°$, $\angle MOC = \angle 5 + \angle 6 = 120°$,

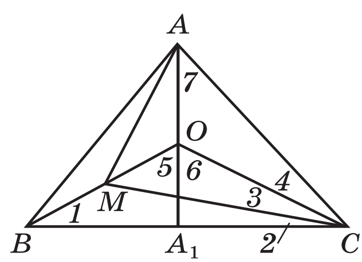

Рис. 104

$\angle 4 = \angle C - \angle OCB = \angle C - \angle 1 = 20°$, $\angle 3 = \angle C - \angle 2 - \angle 4 = 50° - 10° - 20° = 20°$. Отсюда следует, что $OA = OM$ и $\angle OMC = \angle 7 = 40°$.

Треугольник OAM равнобедренный, и $\angle AOM = 360° - (\angle AOC + \angle MOC) = 120°$, поэтому $\angle OMA = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Таким образом, $\angle AMC = \angle OMA + \angle OMC = 70°$.

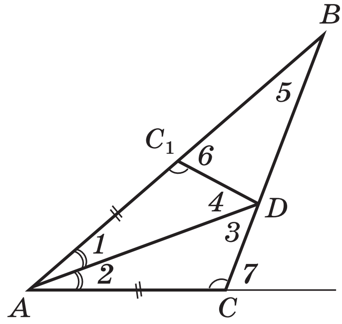

Рис. 105

341. 1) Докажем, что $\angle ADB > \angle ADC$ (рис. 105). Для этого на луче AB отложим отрезок AC_1, равный AC. Так как $AB > AC$, то точка C_1 лежит между точками A и B. $\triangle ADC = \triangle ADC_1$ по двум сторонам и углу между ними, поэтому $CD = C_1D$ и $\angle 3 = \angle 4$, т. е. $\angle ADC = \angle 4$. Но $\angle 4 < \angle ADB$, и, следовательно, $\angle ADB > \angle ADC$.

2) Докажем, что $BD > CD$. Для этого заметим, что $\angle 7 = \angle 6$, так как смежные с ними углы ACD и AC_1D равны. Но угол 7 — внешний угол треугольника ABC, поэтому $\angle 7 > \angle 5$, а следовательно, и $\angle 6 > \angle 5$. В треугольнике BC_1D против большего угла лежит большая сторона, т. е. $BD > C_1D = CD$.

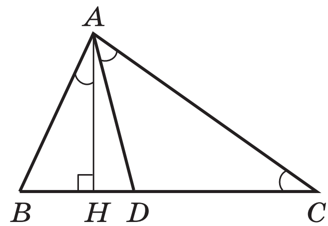

Рис. 106

346. На рисунке 106 согласно задаче 341 $\angle ADB < \angle ADC$, а так как эти углы смежные, то угол ADB острый, а угол ADC тупой. В тупоугольном треугольнике ADC основание H высоты, проведённой из вершины острого угла A, лежит на продолжении стороны DC (задача 300), т. е. точка H лежит на луче DB.

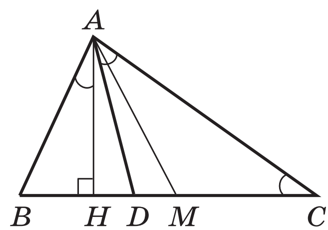

Рис. 107

347. Пусть $AC > AB$, AD — биссектриса, AH — высота, AM — медиана треугольника ABC (рис. 107). Точка H лежит на луче DB, так как $AB < AC$ (задача 346), а так как $BD < CD$ (задача 341), то $BD < \frac{1}{2}BC = BM$. Отсюда следует, что точка M лежит на луче DC. Итак, точка H лежит на луче DB, а точка M — на луче DC, следовательно, точка D лежит между точками H и M.

350. Докажем, что угол C прямой. Для этого достаточно доказать, что хотя бы одна из точек — A_1 или B_1 — совпадает с точкой C. Предположим, что это не так. Тогда в прямоугольном треугольнике AA_1C $AA_1 < AC$, а по условию $AC \leqslant BB_1$, поэтому $AA_1 < BB_1$. С другой стороны, рассматривая прямоугольный треугольник BB_1C, аналогично получаем $BB_1 < AA_1$. Мы пришли к противоречию. Итак, точки A_1 и B_1 совпадают с точкой C, поэтому угол C прямой.

Далее, $AA_1 = AC$, $BB_1 = BC$. Но по условию $AA_1 \leqslant BC$, $BB_1 \leqslant AC$, т. е. $AC \leqslant BC$ и $BC \leqslant AC$. Следовательно, $AC = BC$ и треугольник ABC равнобедренный.

361. Уточним, как нужно понимать эту задачу. Даны отрезок PQ и два угла h_1k_1 и h_2k_2. Требуется построить треугольник ABC так, чтобы $\angle A = \angle h_1k_1$, $\angle B = \angle h_2k_2$, $AB + BC + CA = PQ$. Предположим, что задача решена и треугольник ABC построен. Отложим на продолжении луча AB отрезок $AA_1 = AC$, а на продолжении луча BA отрезок $BB_1 = BC$ и рассмотрим треугольник A_1B_1C (рис. 108).

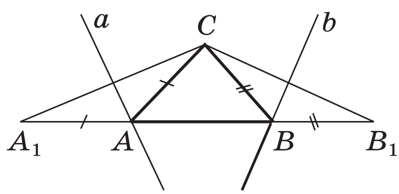

Рис. 108

В этом треугольнике сторона A_1B_1 равна $AA_1 + AB + BB_1 = AC + AB + BC = PQ$, $\angle A_1 = \frac{1}{2}\angle A$ (так как треугольник AA_1C равнобедренный) и $\angle B_1 = \frac{1}{2}\angle B$. Следовательно, треугольник A_1B_1C легко построить по данной стороне A_1B_1 и двум углам A_1 и B_1.

Для построения точек A и B через середины отрезков CA_1 и CB_1 проведём прямые: $a \perp A_1C$ и $b \perp B_1C$ (см. рис. 108). Согласно задаче 160 $A \in a$, $B \in b$, т. е. A — точка пересечения прямой a с отрезком A_1B_1, а B — точка пересечения прямой b с тем же отрезком.

Примерное тематическое планирование учебного материала (68 ч в год)

Номер параграфа	Содержание материала	Кол-во часов
Глава I. Начальные геометрические сведения		**10**
1	Прямая и отрезок	1
2	Луч и угол	1
3	Сравнение отрезков и углов	1
4	Измерение отрезков	2
5	Измерение углов	1
6	Перпендикулярные прямые	2
	Решение задач	1
	Контрольная работа № 1	1
Глава II. Треугольники		**17**
1	Первый признак равенства треугольников	3
2	Медианы, биссектрисы и высоты треугольника	3
3	Второй и третий признаки равенства треугольников	4
4	Задачи на построение	3
	Решение задач	3
	Контрольная работа № 2	1
Глава III. Параллельные прямые		**13**
1	Признаки параллельности двух прямых	4
2	Аксиома параллельных прямых	5
	Решение задач	3
	Контрольная работа № 3	1

Продолжение

Номер параграфа	Содержание материала	Кол-во часов
Глава IV. Соотношения между сторонами и углами треугольника		**18**
1	Сумма углов треугольника	2
2	Соотношения между сторонами и углами треугольника	3
	Контрольная работа № 4	1
3	Прямоугольные треугольники	4
4	Построение треугольника по трём элементам	4
	Решение задач	3
	Контрольная работа № 5	1
Повторение. Решение задач		**10**
Всего		**68**

Содержание

33994f9f-6870-11e3-8221-0050569c0d55

Учебное издание

Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Фёдорович
Глазков Юрий Александрович
Некрасов Владимир Борисович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Методические рекомендации

7 класс

Учебное пособие
для общеобразовательных организаций

Центр естественно-математического образования
Редакция математики и информатики
Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художники *О. П. Богомолова, А. Б. Юдкин*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской*
Техническое редактирование
и компьютерная вёрстка *Е. В. Алфёровой*
Корректоры *О. В. Крупенко, М. А. Павлушкина*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01.
Подписано в печать 07.04.15. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура SchoolBook. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 0,0.
Тираж 3000 экз. Заказ №   .

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.
Тел.: +7(4812)31-11-96. Факс: +7(4812)31-31-70.
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru