А. Г. МОРДКОВИЧ, П. В. СЕМЕНОВ

Алгебра

9 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК

для учащихся общеобразовательных учреждений

*Рекомендовано
Министерством образования и науки
Российской Федерации*

12-е издание, стереотипное

Москва 2010

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721
М79

**На учебник получены положительные заключения
Российской академии наук (№ 10106—5215/9 от 31.10.2007)
и Российской академии образования (№ 01—659/5/7д от 29.10.2007)**

Мордкович А. Г.

М79 Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. — 12-е изд., стер. — М. : Мнемозина, 2010. — 224 с. : ил.

ISBN 978-5-346-01420-1

Учебник содержит завершающий теоретический материал курса алгебры основной общеобразовательной школы. Он базируется на принципиально новой концепции, ключевыми понятиями которой являются математический язык и математическая модель, а приоритетной содержательно-методической линией — функционально-графическая. Включено большое число примеров с детальными и обстоятельными решениями. Упражнения для самостоятельной работы помещены во второй части (в задачнике). Доступное и подробное изложение материала приучает школьников к чтению учебной литературы и самостоятельному поиску информации.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.141я721

ISBN 978-5-346-01420-1 (ч.1)
ISBN 978-5-346-01419-5 (общ.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

Учебно-методический комплект* для изучения курса алгебры в 9-м классе общеобразовательной школы, выпускаемый издательством «Мнемозина», состоит из следующих элементов:

Программы. Математика. 5—6 классы. Алгебра. 7—9 классы. Алгебра и начала математического анализа. 10—11 классы / авт.-сост. И. И. Зубарева, А. Г. Мордкович;

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник;

А. Г. Мордкович, Т. В. Мишустина, Е. Е. Тульчинская, П. В. Семенов. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2. Задачник;

А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. Алгебра. 9 класс. Методическое пособие для учителя;

Л. А. Александрова. Алгебра. 9 класс. Контрольные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Л. А. Александрова. Алгебра. 9 класс. Самостоятельные работы / Под ред. А. Г. Мордковича;

Е. Е. Тульчинская. Алгебра. 9 класс. Блицопрос;

В. В. Шеломовский. Электронное сопровождение курса «Алгебра—9» / Под ред. А. Г. Мордковича.

У вас в руках первая книга указанного комплекта. Хотим обратить внимание на то, что она существенно отличается от изданий 1999—2007 гг. Анализ многолетнего опыта работы учителей по предыдущим изданиям вынудил авторов в ряде случаев изменить порядок следования параграфов и внести некоторые редакционные и стилистические правки.

Авторы надеются, что учебник будут читать и ученики, и учителя, и родители, поскольку изложение материала доступное, зачастую сопровождаемое непривычными для математической рутинной лексики оборотами. Выделяются основные этапы рассуждений с фиксацией на них внимания читателя. Например, решение практически всех так называемых текстовых задач оформлено в учебнике (как и в учебниках для 7-го и 8-го классов) в виде трех этапов: составление математической модели; работа с полученной моделью; ответ на вопрос задачи.

---

* Более подробную информацию об УМК можно получить на сайтах www.mnemozina.ru и www.ziimag.narod.ru

На уроках математики учитель всегда сочетает обыденный язык (язык общения, язык литературного повествования) с предметным языком — строгим, сухим, лаконичным, строящимся по принятым в математике законам. Так написан и данный учебник, представляющий собой книгу не для заучивания, а для изучения, т. е. для чтения и понимания.

Опираясь на учебник, учитель прекрасно разберется в том, что́ надо рассказать учащимся на уроке, что́ рекомендовать им запомнить, а что́ предложить просто прочесть дома (и, возможно, обсудить в классе на следующем уроке в жанре беседы).

В некоторых случаях текст набран петитом. Это материал, не обязательный для изучения всеми учащимися, он ориентирован на тех, кто интересуется математикой.

Из основных содержательно-методических линий школьного курса алгебры в качестве приоритетной выбрана функционально-графическая линия. Это выражается прежде всего в том, что, какой бы класс функций, уравнений, выражений ни изучался, построение материала практически всегда осуществляется по жесткой схеме:

функция — уравнения — преобразования.

Для полноценной реализации функционально-графической линии особенно важным является курс алгебры 9-го класса. Опираясь на опыт изучения функций, их свойств и графиков в 7—8-м классах, рассмотрев в указанных классах все основные понятия, связанные с функциями, на наглядно-интуитивном и рабочем уровнях, в 9-м классе мы выходим на уровень теоретического осмысления.

В учебнике приведено много примеров с подробными решениями. На окончание решения примера указывает либо слово «ответ», либо значок ◨.

Авторы

ГЛАВА 1

РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ИХ СИСТЕМЫ

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Прочитав название параграфа, вы, наверное, спросите: «Почему мы топчемся на месте?» В самом деле, линейные и квадратные неравенства с одной переменной вы научились решать в курсе алгебры 8-го класса — это была одна из последних тем курса. Действительно, почти ничего нового вы из этого параграфа не узнаете, более того, обнаружите, что некоторые примеры заимствованы из учебника «Алгебра–8». Рассматривайте этот параграф как возможность повторения, которое позволит вам плавно перейти к изучению новой темы (в следующем параграфе).

Напомним, что **линейным неравенством с одной переменной** x называют неравенство вида $ax + b > 0$ (вместо знака $>$ может быть, разумеется, любой другой знак неравенства), где a и b — действительные числа ($a \neq 0$). **Квадратным неравенством с одной переменной** x называют неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$, где a, b, c — действительные числа (кроме $a = 0$).

Значение переменной x, которое обращает неравенство $f(x) > 0$ в верное числовое неравенство, называют **решением неравенства** (или **частным решением**). Множество всех частных решений неравенства называют **общим решением** (или просто **решением**) неравенства.

Замечание 1. Как видите, термин «решение» употребляют и в смысле общего, и в смысле частного решения неравенства. Более того, сам процесс отыскания решений неравенства тоже называют решением неравенства. Обычно по смыслу бывает ясно, какое именно понимание термина «решение» имеется в виду.

Два неравенства $f(x) < g(x)$ и $r(x) < s(x)$ называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (в частности, если оба неравенства не имеют решений). Можно сказать и так: два неравенства равносильны, если любое частное решение первого неравенства является частным решением второго, и обратно, любое частное решение второго неравенства является частным решением первого.

Обычно при решении неравенства стараются заменить данное неравенство более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием неравенства.** Эти преобразования указаны в сформулированных ниже правилах 1—3.

Правило 1. *Любой член неравенства можно перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком, не меняя при этом знака неравенства.*

Более точная формулировка такова: если какой-либо член неравенства перенести из одной части неравенства в другую с противоположным знаком и если при этом сохранить знак неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.

Например, неравенство $3x + 5 < x^2$ равносильно неравенству $-x^2 + 3x + 5 < 0$: член x^2 перенесли из правой части неравенства в левую с противоположным знаком, а знак неравенства оставили неизменным.

Правило 2. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же положительное число, не меняя при этом знака неравенства.*

Например, неравенство $8x - 4 > 12x^2$ равносильно неравенству $2x - 1 > 3x^2$: обе части первого неравенства разделили на положительное число 4, а знак неравенства оставили неизменным.

Правило 3. *Обе части неравенства можно умножить или разделить на одно и то же отрицательное число, изменив при этом знак неравенства на противоположный ($<$ на $>$, $\leqslant$ на $\geqslant$).*

Например, неравенство $-2x^2 - 3x + 1 \leqslant 0$ равносильно неравенству $2x^2 + 3x - 1 \geqslant 0$: обе части первого неравенства умножили на отрицательное число -1, изменив при этом знак неравенства на противоположный.

Правила 2 и 3 допускают следующие обобщения (соответствующие утверждения представляют собой теоремы, но мы, ради удобства читателя, оформим их в виде правил).

Правило 2*. ***Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, положительное при всех значениях x, и сохранить знак исходного неравенства, то получится неравенство, равносильное данному.***

Правило 3*. ***Если обе части неравенства с переменной x умножить или разделить на одно и то же выражение $p(x)$, отрицательное при всех значениях x, и изменить знак исходного неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.***

Докажем для примера правило 3*.

Дано неравенство $f(x) > g(x)$ и выражение $p(x)$, отрицательное при любых значениях x. Пусть $x = a$ — частное решение неравенства $f(x) > g(x)$. Это значит, что $f(a) > g(a)$ — верное числовое неравенство. Умножив обе его части на отрицательное число $p(a)$, получим: $f(a)p(a) < g(a)p(a)$ — верное числовое неравенство. Это значит, что $x = a$ — частное решение неравенства $f(x)p(x) < g(x)p(x)$. Итак, мы доказали, что любое частное решение неравенства $f(x) > g(x)$ является частным решением неравенства $f(x)p(x) < g(x)p(x)$.

Пусть, обратно, $x = b$ — частное решение неравенства $f(x)p(x) < g(x)p(x)$. Это значит, что $f(b)p(b) < g(b)p(b)$ — верное числовое неравенство. Разделив обе его части на отрицательное число $p(b)$, получим: $f(b) > g(b)$ — верное числовое неравенство. Это значит, что $x = b$ — частное решение неравенства $f(x) > g(x)$. Итак, мы доказали, что любое частное решение неравенства $f(x)p(x) < g(x)p(x)$ является частным решением неравенства $f(x) > g(x)$.

Вывод: неравенства $f(x) > g(x)$ и $f(x)p(x) < g(x)p(x)$, где $p(x) < 0$, равносильны.

Например, неравенство $(2x + 1)(x^2 + 2) > 0$ равносильно неравенству $2x + 1 > 0$: обе части исходного неравенства разделили на выражение $x^2 + 2$, положительное при любых значениях x; при этом знак исходного неравенства оставили без изменения.

Неравенство $\frac{3x-4}{-x^4-1} \leqslant 0$ равносильно неравенству $3x - 4 \geqslant 0$: обе части исходного неравенства умножили на выражение $-x^4 - 1$, отрицательное при любых значениях x; при этом знак исходного неравенства изменили на противоположный.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15}.$$

Решение. Умножим обе части неравенства на положительное число 15, оставив знак неравенства без изменения (правило 2). Это позволит нам освободиться от знаменателей, т. е. перейти к более простому неравенству, равносильному данному:

$$15\left(\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5}\right) > 15\left(2x - \frac{1}{15}\right);$$

$$5x + 3(2x - 1) > 30x - 1;$$

$$11x - 3 > 30x - 1.$$

Воспользовавшись правилом 1 решения неравенств, перенесем член $30x$ из правой части неравенства в левую, а член -3 — из левой части в правую (с противоположными знаками). Получим:

$$11x - 30x > -1 + 3;$$

$$-17x > 2.$$

Наконец, применив правило 3, получим: $x < -\frac{2}{17}$. ◄

Замечание 2. Иногда используют другую запись ответа — в виде числового промежутка $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right)$. На наш взгляд, ответ при решении неравенства предпочтительнее записывать именно в виде простейшего неравенства: $x < -\frac{2}{17}$.

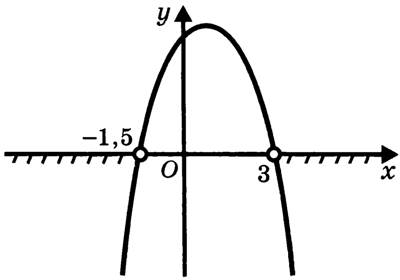


Рис. 1

П р и м е р 2. Решить неравенство $3x + 9 < 2x^2$.

Р е ш е н и е. 1) Преобразуем неравенство к виду $3x + 9 - 2x^2 < 0$ (выполнили равносильное преобразование неравенства по правилу 1). Найдем корни квадратного трехчлена $-2x^2 + 3x + 9$; для этого решим квадратное уравнение $-2x^2 + 3x + 9 = 0$:

$$x_1 = 3; \qquad x_2 = -1{,}5.$$

2) Парабола, служащая графиком функции $y = -2x^2 + 3x + 9$, пересекает ось x в точках 3 и $-1{,}5$, а ветви параболы направлены вниз, поскольку старший коэффициент квадратного трехчлена $2x^2 + 3x + 9$ равен -2, т. е. является отрицательным числом. На рис. 1 дано схематическое представление о графике функции.

3) $y < 0$ на тех промежутках оси x, где график расположен ниже оси x, т. е. на открытом луче $(-\infty; -1{,}5)$ или на открытом луче $(3; +\infty)$.

О т в е т: $x < -1{,}5$; $x > 3$.

Полезно вспомнить два утверждения, которые были доказаны в курсе алгебры 8-го класса и не раз понадобятся нам в дальнейшем.

1. *Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант D — отрицательное число) и если при этом $a > 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство*

$$ax^2 + bx + c > 0.$$

Иными словами, если $D < 0$, $a > 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ в этом случае не имеет решений.

2. *Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней (т. е. его дискриминант D — отрицательное число) и если при этом $a < 0$, то при всех значениях x выполняется неравенство*

$$ax^2 + bx + c < 0.$$

Иначе говоря, если $D < 0$, $a < 0$, то неравенство $ax^2 + bx + c < 0$ выполняется при всех x; напротив, неравенство $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ в этом случае не имеет решений.

Эти утверждения — частные случаи следующей теоремы.

Теорема | ***Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет отрицательный дискриминант, то при любом x значение трехчлена имеет знак старшего коэффициента a.***

Пример 3. Решить неравенство:

а) $2x^2 - x + 4 > 0$; б) $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$.

Решение. а) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $2x^2 - x + 4$. Имеем: $D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = -31 < 0$. Старший коэффициент трехчлена (число 2) положителен. Значит, по теореме при любом x выполняется неравенство $2x^2 - x + 4 > 0$, т. е. решением заданного неравенства служит вся числовая прямая $(-\infty; +\infty)$.

б) Найдем дискриминант квадратного трехчлена $-x^2 + 3x - 8$. Имеем: $D = 3^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-8) = -23 < 0$. Старший коэффициент трехчлена (число -1) отрицателен. Следовательно, по теореме при любом x выполняется неравенство $-x^2 + 3x - 8 < 0$. Это значит, что заданное неравенство $-x^2 + 3x - 8 \geqslant 0$ не выполняется ни при каком значении x, т. е. не имеет решений.

Ответ: а) $(-\infty; +\infty)$; б) нет решений.

Замечание 3. Иногда вместо словосочетания «нет решений» используют значок $\varnothing$ — символ пустого множества (подробнее об этом мы поговорим позднее — см. с. 26).

В следующем примере напомним еще один способ рассуждений, который можно применять при решении неравенств.

Пример 4. Решить неравенство $x^2 - 6x + 8 > 0$.

Решение. Разложим квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ на линейные множители. Корнями трехчлена являются числа 2 и 4. Воспользовавшись известной из курса алгебры для 8-го класа формулой $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получим:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4).$$

Отметим на числовой прямой корни трехчлена: 2 и 4 (рис. 2). Выясним, когда произведение $(x - 2)(x - 4)$ положительно, а когда —

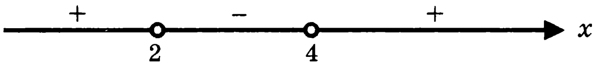


Рис. 2

отрицательно. Если $x > 4$, то $x - 2 > 0$ и $x - 4 > 0$, значит, $(x - 2)(x - 4) > 0$. Если $2 < x < 4$, то $x - 2 > 0$, а $x - 4 < 0$, значит, $(x - 2)(x - 4) < 0$. Если, наконец, $x < 2$, то и $x - 2 < 0$, и $x - 4 < 0$, и потому $(x - 2)(x - 4) > 0$. Нас интересуют все те значения переменной x, при которых данный квадратный трехчлен $x^2 - 6x + 8$ принимает положительные значения. Это имеет место на двух открытых лучах: $(-\infty; 2)$, $(4; +\infty)$.

Ответ: $x < 2$; $x > 4$.

Метод рассуждений, который мы применили в примере 4, называют обычно *методом интервалов* (или *методом промежутков*). Он активно используется в математике для решения рациональных неравенств. В следующем параграфе мы изучим метод интервалов более детально, а этот параграф, чтобы не ограничиваться в нем только напоминанием известного, завершим примером, в котором речь идет о решении так называемых неравенств с модулями.

Пример 5. Решить неравенство:

а) $|x - 2| < 3$; б) $|x + 3{,}2| \leqslant 2$; в) $|10x| > 27$.

Решение. Напомним геометрическое истолкование выражения $|x - a|$ — это расстояние на координатной (числовой) прямой между точками x и a, которое обозначают $\rho(x; a)$ (ρ — буква греческого алфавита «*ро*»):

$$|x - a| = \rho(x; a).$$

Например,

$$|x - 2| = \rho(x; 2); \quad |x + 3{,}2| = \rho(x; -3{,}2); \quad |x| = \rho(x; 0).$$

а) Неравенство $|x - 2| < 3$ можно истолковать так: нужно найти на координатной прямой все такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 2) < 3$, т. е. удалены от точки 2 на расстояние, меньшее 3. Это все точки, принадлежащие интервалу $(-1; 5)$, и только они (рис. 3). Интервал $(-1; 5)$ — решение заданного неравенства.

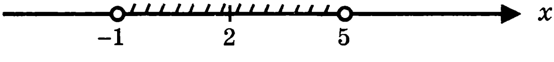


Рис. 3

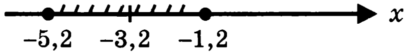


Рис. 4

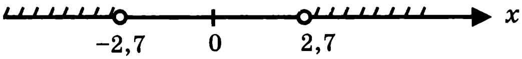


Рис. 5

б) Неравенство $|x + 3,2| \leqslant 2$ можно истолковать так: нужно найти на координатной прямой все такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; -3,2) \leqslant 2$, т. е. удалены от точки $-3,2$ на расстояние, меньшее или равное 2. Это все точки, принадлежащие отрезку $[-5,2; -1,2]$, и только они (рис. 4). Отрезок $[-5,2; -1,2]$ — решение заданного неравенства.

в) Сначала разделим обе части неравенства на одно и то же положительное число 10; получим: $|x| > 2,7$. Неравенство $|x| > 2,7$ можно истолковать так: нужно найти на координатной прямой все такие точки x, которые удовлетворяют условию $\rho(x; 0) > 2,7$, т. е. удалены от точки 0 на расстояние, большее 2,7. Это все точки, принадлежащие открытым лучам $(-\infty; -2,7)$ или $(2,7; +\infty)$, и только они (рис. 5).

Ответ: а) $-1 < x < 5$; б) $-5,2 \leqslant x \leqslant -1,2$; в) $x < -2,7$; $x > 2,7$.

§ 2. РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Рациональное неравенство с одной переменной x — это неравенство вида $h(x) > q(x)$, где $h(x)$ и $q(x)$ — рациональные выражения, т. е. алгебраические выражения, составленные из чисел и переменной x с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень. Разумеется, переменная может быть обозначена любой другой буквой.

При решении рациональных неравенств используются те правила, которые были сформулированы выше в § 1. С помощью этих правил обычно преобразуют заданное рациональное неравенство к виду $f(x) > 0$ (< 0), где $f(x)$ — алгебраическая дробь (или многочлен). Далее разлагают числитель и знаменатель дроби $f(x)$ на множители вида $x - a$ (если, конечно, это возможно) и применяют *метод интервалов*, который мы уже упоминали выше (см. в предыдущем параграфе пример 4) и подробнее покажем на ряде примеров.

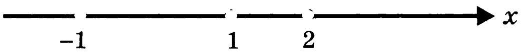


Рис. 6

Пример 1. Решить неравенство

$$(x-1)(x+1)(x-2) > 0.$$

Решение. Рассмотрим выражение

$$f(x) = (x-1)(x+1)(x-2).$$

Оно обращается в 0 в точках 1, –1, 2; отметим эти точки на числовой прямой. Числовая прямая разбивается указанными точками на четыре промежутка (рис. 6), на каждом из которых выражение $f(x)$ сохраняет постоянный знак. Чтобы в этом убедиться, проведем четыре рассуждения (для каждого из указанных промежутков в отдельности).

1) Возьмем любую точку x из промежутка $(2; +\infty)$. Эта точка расположена на числовой прямой правее точки –1, правее точки 1 и правее точки 2 (рис. 7). Это значит, что $x > -1$, $x > 1$, $x > 2$. Но тогда $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 > 0$, а значит, и $f(x) > 0$ (как произведение трех положительных чисел). Итак, на всем промежутке $(2; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

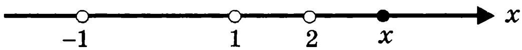


Рис. 7

2) Возьмем любую точку x из интервала $(1; 2)$. Эта точка расположена на числовой прямой правее точки –1, правее точки 1, но левее точки 2 (рис. 8). Значит, $x > -1$, $x > 1$, но $x < 2$, а потому $x + 1 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 2 < 0$. Но тогда $f(x) < 0$ (как произведение двух положительных и одного отрицательного числа). Итак, на всем промежутке $(1; 2)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$.

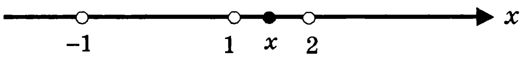


Рис. 8

3) Возьмем любую точку x из интервала $(-1; 1)$. Эта точка расположена на числовой прямой правее точки –1, левее точки 1

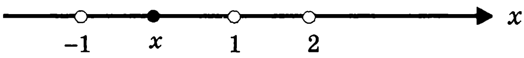


Рис. 9

и левее точки 2 (рис. 9). Значит, $x > -1$, но $x < 1$, $x < 2$, а потому $x + 1 > 0$, $x - 1 < 0$, $x - 2 < 0$. Но тогда $f(x) > 0$ (как произведение двух отрицательных и одного положительного числа). Итак, на всем промежутке $(-1; 1)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

4) Возьмем, наконец, любую точку x из открытого луча $(-\infty; -1)$. Эта точка расположена на числовой прямой левее точки -1, левее точки 1 и левее точки 2 (рис. 10). Это значит, что $x < -1$, $x < 1$, $x < 2$. Но тогда $x + 1 < 0$, $x - 1 < 0$, $x - 2 < 0$, а значит, и $f(x) < 0$ (как произведение трех отрицательных чисел). Итак, на всем промежутке $(-\infty; -1)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$.

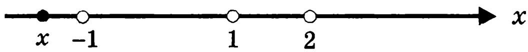


Рис. 10

Подведем итоги. Знаки выражения $f(x)$ в выделенных промежутках таковы, как показано на рис. 11. Нас интересуют те промежутки, на которых выполняется неравенство $f(x) > 0$; они заштрихованы на рис. 11. Значит, неравенство $f(x) > 0$ выполняется на интервале $(-1; 1)$ или на открытом луче $(2; +\infty)$.

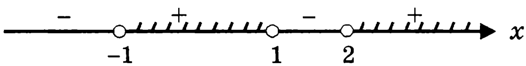


Рис. 11

О т в е т: $-1 < x < 1$; $x > 2$.

П р и м е р 2. Решить неравенство

$$(x - 1)(x + 1)(x - 2) \leqslant 0.$$

Р е ш е н и е. Как и в предыдущем примере, извлечем необходимую информацию из рис. 11, но с двумя изменениями по сравнению с примером 1. Во-первых, поскольку нас интересует, при каких значениях x выполняется неравенство $f(x) < 0$, нам придется выбрать промежутки $(-\infty; -1)$ и $(1; 2)$. Во-вторых, нас устраивают и те точки, в которых выполняется равенство $f(x) = 0$. Это точки -1, 1, 2, отметим их на рисунке темными кружочками и включим в ответ. На рис. 12 представлена геометрическая

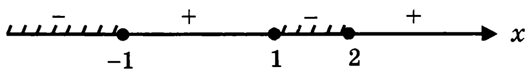


Рис. 12

иллюстрация решения неравенства, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

О т в е т: $x \leqslant -1$; $1 \leqslant x \leqslant 2$.

П р и м е р 3. Решить неравенство

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 5x - 6} < 0.$$

Р е ш е н и е. Разложим на множители числитель и знаменатель алгебраической дроби $f(x)$, содержащейся в левой части неравенства. В числителе имеем:

$$x^2 - x = x(x - 1).$$

Чтобы разложить на множители квадратный трехчлен $x^2 - 5x - 6$, содержащийся в знаменателе дроби, найдем его корни. Из уравнения $x^2 - 5x - 6 = 0$ находим: $x_1 = -1$, $x_2 = 6$. Значит,

$$x^2 - 5x - 6 = (x + 1)(x - 6)$$

(мы снова, как это уже было в § 1, воспользовались формулой разложения на множители квадратного трехчлена: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$).

Тем самым мы преобразовали заданное неравенство к виду

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-6)} < 0.$$

Числитель дроби $\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-6)}$ обращается в 0 в точках 0 и 1, а знаменатель обращается в 0 в точках –1 и 6. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 13). Числовая прямая разбивается указанными точками на пять промежутков. Рассуждая так же, как в примере 1, приходим к выводу, что на каждом промежутке выражение $f(x)$ сохраняет постоянный знак, причем знаки выражения $f(x)$ в выделенных промежутках таковы, как показано на рис. 13.

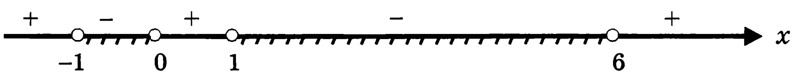


Рис. 13

Нас интересует, где выполняется неравенство $f(x) < 0$. Это имеет место на интервале $(-1; 0)$ или на интервале $(1; 6)$.

Ответ: $-1 < x < 0$; $1 < x < 6$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2} \geqslant 1.$$

Решение. При решении рациональных неравенств, как правило, предпочитают иметь в правой части неравенства число 0:

$$\frac{6x^2-5x+4}{6x^2-x-2} - 1 \geqslant 0;$$

$$\frac{6x^2-5x+4-6x^2+x+2}{6x^2-x-2} \geqslant 0;$$

$$\frac{-4x+6}{6x^2-x-2} \geqslant 0.$$

Если в правой части неравенства содержится лишь число 0, удобнее проводить рассуждения, когда в левой части неравенства и числитель и знаменатель имеют положительный старший коэффициент. А что у нас? У нас в знаменателе дроби в этом смысле все в порядке (старший коэффициент, т. е. коэффициент при x^2, равен 6 — положительное число), а в числителе старший коэффициент (коэффициент при x) равен -4 (отрицательное число). Умножив обе части неравенства на -1 и изменив при этом знак неравенства на противоположный, получим равносильное неравенство

$$\frac{4x-6}{6x^2-x-2} \leqslant 0.$$

Числитель дроби преобразуем к виду $4\left(x-\frac{3}{2}\right)$. Чтобы разложить на множители содержащийся в знаменателе дроби квадратный трехчлен $6x^2-x-2$, найдем его корни. Из уравнения $6x^2-x-2=0$ находим: $x_1=\frac{2}{3}$, $x_2=-\frac{1}{2}$. Значит,

$$6x^2-x-2=6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

Тем самым заданное неравенство мы преобразовали к виду

$$\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)}{6\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \leqslant 0 \text{ и далее } \frac{x-\frac{3}{2}}{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)} \leqslant 0$$

(обе части неравенства разделили на положительное число $\frac{4}{6}$).

Рассмотрим выражение

$$f(x)=\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)}{\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)}.$$

Числитель этой дроби обращается в 0 в точке $\frac{3}{2}$, а знаменатель — в точках $\frac{2}{3}$ и $-\frac{1}{2}$. Отметим эти точки на числовой прямой (рис. 14); она разбивается указанными точками на четыре промежутка, причем на каждом промежутке выражение $f(x)$ сохраняет постоянный знак — эти знаки указаны на рис. 14. Нас интересуют те промежутки, на которых выполняется неравенство $f(x) < 0$; эти промежутки выделены штриховкой на рис. 15. По условию нас интересуют и те точки x, в которых выполняется равенство $f(x) = 0$. Такая точка только одна — это точка $x = \frac{3}{2}$, поскольку лишь при этом значении числитель дроби $f(x)$ обращается в нуль. Точка $x = \frac{3}{2}$ отмечена на рис. 15 темным кружочком. Таким образом, на рис. 15 представлена геометрическая иллюстрация решения

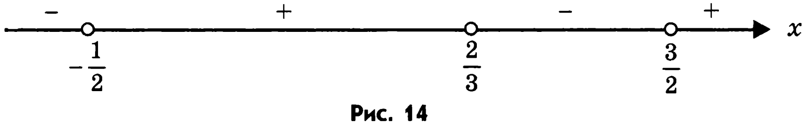


Рис. 14

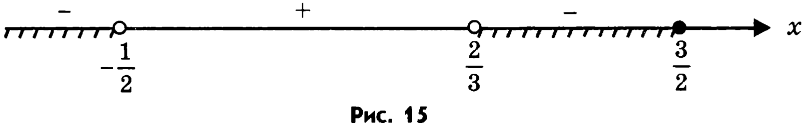


Рис. 15

заданного неравенства, от которой нетрудно перейти к аналитической записи.

Ответ: $x < -\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3} < x \leqslant \frac{3}{2}$.

В каждом из рассмотренных примеров мы преобразовывали заданное неравенство так, чтобы получилось равносильное ему неравенство вида $f(x) > 0$ или $f(x) < 0$, где

$$f(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)(x-d)}.$$

Затем отмечали на оси x (на числовой прямой) точки a, b, c, d и определяли знаки выражения $f(x)$ на выделенных промежутках. Заметили, что на самом правом из выделенных промежутков выполняется неравенство $f(x) > 0$, а далее по промежуткам (при условии, что числа a, b, c, d попарно различны) знаки выражения $f(x)$ чередуются (рис. 16а). Это чередование удобно иллюстрировать с помощью волнообразной кривой, которая чертится справа налево и сверху вниз (рис. 16б). На тех промежутках, где эта кривая (ее иногда называют *кривой знаков*) расположена выше оси x, выполняется неравенство $f(x) > 0$; на тех промежутках, где эта кривая расположена ниже оси x, выполняется неравенство $f(x) < 0$.

Заметим, что количество множителей в числителе и знаменателе дроби может быть любым (не обязательно по два в числителе и знаменателе).

Пример 5. Решить неравенство

$$\frac{x^3 - 7x}{(2x+3)(3x-8)} \geqslant 0.$$

Решение. Имеем:

$$\frac{x(x^2-7)}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)\cdot 3\left(x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0;$$

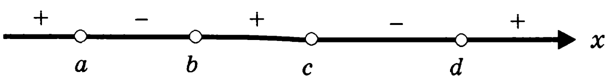


Рис. 16а

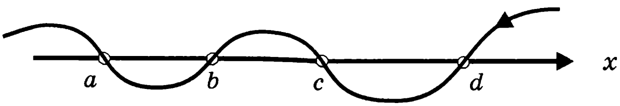


Рис. 16б

$$\frac{x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)} \geqslant 0$$

(обе части предыдущего неравенства умножили на положительное число 6).

Чтобы воспользоваться методом интервалов, отметим на числовой прямой точки 0, $\sqrt{7}$, $-\sqrt{7}$ (в этих точках числитель дроби, содержащейся в левой части неравенства, обращается в 0) и точки $-\frac{3}{2}$ и $\frac{8}{3}$ (в этих точках знаменатель указанной дроби обращается в 0). Обычно точки отмечают схематически, учитывая только порядок их следования (какая правее, какая левее) и не особенно обращая внимания на соблюдение масштаба. Ясно, что $-\sqrt{7} < -\frac{3}{2} < 0$. Сложнее (если под рукой нет калькулятора) обстоит дело с числами $\sqrt{7}$ и $\frac{8}{3}$. Поступим так: рассмотрим квадраты этих чисел.

Имеем: $(\sqrt{7})^2 = 7$, $\left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{64}{9} = 7\frac{1}{9}$. Значит, $(\sqrt{7})^2 < \left(\frac{8}{3}\right)^2$, и потому $\sqrt{7} < \frac{8}{3}$.

Итак,

$$-\sqrt{7} < -\frac{3}{2} < 0 < \sqrt{7} < \frac{8}{3}.$$

Отметим указанные пять точек в указанном порядке на числовой прямой (рис. 17а). Расставим знаки выражения

$$f(x) = \frac{x(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})}{\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{8}{3}\right)}$$

на полученных промежутках: на самом правом — знак «+», а далее знаки чередуются (рис. 17б). Начертим кривую знаков и выделим (штриховкой) те промежутки, на которых выполняется интересующее нас неравенство $f(x) > 0$ (рис. 17в). Учтем, наконец,

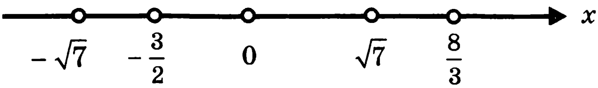


Рис. 17а

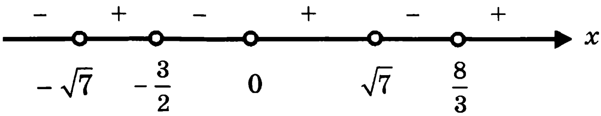


Рис. 17б

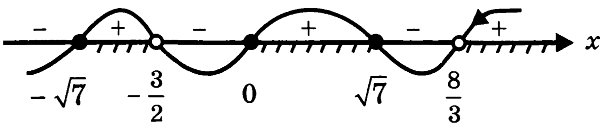


Рис. 17в

что речь идет о *нестрогом неравенстве* $f(x) \geqslant 0$, значит, нас интересуют и те точки, в которых выражение $f(x)$ обращается в нуль. Это корни числителя дроби $f(x)$, т. е. точки 0, $\sqrt{7}$ и $-\sqrt{7}$; отметим их на рис. 17в темными кружочками (и, естественно, включим в ответ). Вот теперь рис. 17в дает полную геометрическую иллюстрацию решения заданного неравенства.

О т в е т : $-\sqrt{7} \leqslant x < -\frac{3}{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \sqrt{7}$; $x > \frac{8}{3}$.

Обращаем ваше внимание на то, что встречаются рациональные неравенства, при решении которых метод интервалов следует применять с осторожностью, с некоторыми поправками. Это мы обсудим в остальных примерах параграфа.

П р и м е р 6. Решить неравенство

$$(x-1)^2(x+2) < 0.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим выражение $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, отметим точки 1 и -2 на числовой прямой (рис. 18) и определим знаки $f(x)$ на каждом из трех полученных промежутков.

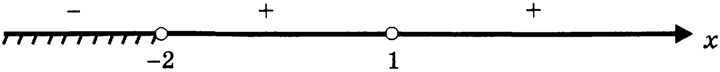


Рис. 18

Если $x \in (1; +\infty)$, т. е. $x > 1$, то $(x-1)^2 > 0$, $x + 2 > 0$. Значит, $(x-1)^2(x+2) > 0$. Следовательно, на открытом луче $(1; +\infty)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Если $x \in (-2; 1)$, т. е. $-2 < x < 1$, то $(x-1)^2 > 0$, $x + 2 > 0$. Значит, $(x-1)^2(x+2) > 0$. Таким образом, на интервале $(-2; 1)$ выполняется неравенство $f(x) > 0$.

Если $x \in (-\infty; -2)$, т. е. $x < -2$, то $(x-1)^2 > 0$, $x + 2 < 0$. Значит, $(x-1)^2(x+2) < 0$. Итак, на открытом луче $(-\infty; -2)$ выполняется неравенство $f(x) < 0$.

Знаки выражения $f(x)$ схематически представлены на рис. 18. Неравенство $f(x) < 0$ выполняется на открытом луче $(-\infty; -2)$.

О т в е т: $x < -2$.

Замечание 1. В примере 6 не было того чередования знаков, на которое мы обратили внимание выше, а потому и кривую знаков мы здесь чертить не стали. Привычная картина нарушена из-за того, что в выражении $f(x)$ есть множитель $(x-1)^2$. Примите совет: если после разложения на множители числителя и знаменателя алгебраической дроби $f(x)$ вы обнаружили множитель вида $(x-a)^n$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, не пользуйтесь кривой знаков, а определяйте знаки выражения $f(x)$ в каждом из выделенных промежутков по отдельности, как в примере 6.

Замечание 2. Если бы заданное в примере 6 неравенство было нестрогим, т. е. имело вид $(x-1)^2(x+2) \leqslant 0$, то геометрическая иллюстрация решения изменилась бы: точки 1 и -2 следовало отметить закрашенными кружочками и включить в ответ (рис. 19). Решение неравенства имело бы тогда следующий вид: $x \leqslant -2$; $x = 1$.

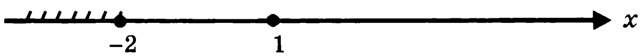


Рис. 19

П р и м е р 7. Решить неравенство

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} < \frac{3}{7 + x}.$$

Р е ш е н и е. Преобразуем неравенство к виду

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} - \frac{3}{7 + x} < 0$$

и поработаем с левой частью получившегося неравенства:

$$\frac{19 - x^2 - 4x}{49 - x^2} - \frac{3}{7 + x} = \frac{19 - x^2 - 4x}{(7 - x)(7 + x)} - \frac{3^{\underline{|7-x}}}{7 + x} =$$

$$= \frac{19 - x^2 - 4x - 3(7 - x)}{(7 - x)(7 + x)} = \frac{-x^2 - x - 2}{(7 - x)(7 + x)} = \frac{x^2 + x + 2}{(x - 7)(x + 7)}$$

(числитель и знаменатель дроби умножили на -1, это тождественное преобразование дроби).

Таким образом, задача сводится к решению неравенства

$$\frac{x^2 + x + 2}{(x - 7)(x + 7)} < 0.$$

Попытаемся разложить на множители числитель алгебраической дроби, содержащейся в левой части неравенства, т. е. выражение $x^2 + x + 2$. Но дискриминант этого квадратного трехчлена отрицателен: $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7$. Значит, корней у трехчлена нет, а потому формула $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ здесь неприменима. Как же быть?

Ответ на этот вопрос дает теорема из § 1: если у квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ отрицательный дискриминант и положительный старший коэффициент, то трехчлен п о л о ж и т е л е н при всех значениях x. Но тогда на него можно разделить обе части неравенства, не меняя знака неравенства (см. в § 1 правило 2*). Получим:

$$\frac{1}{(x - 7)(x + 7)} < 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 20), получаем в качестве решения последнего (а значит, и заданного) неравенства интервал $(-7; 7)$.

О т в е т: $-7 < x < 7$.

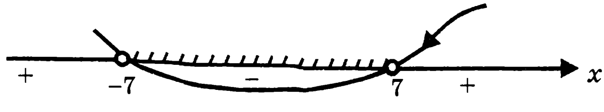


Рис. 20

Пример 8. Решить неравенство $\frac{3x^3 - 2x^2 - 2x}{x} < 0$.

Решение. Имеем: $\frac{x(3x^2 - 2x - 2)}{x} < 0$, т. е. $3x^2 - 2x - 2 < 0$ (при условии, что $x \neq 0$). Найдем корни квадратного уравнения $3x^2 - 2x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - (-2)\cdot 3}}{3} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3};$$

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{7}}{3}; \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{7}}{3}.$$

Конечно, можно, применив формулу

$$3x^2 - 2x - 2 = 3(x - x_1)(x - x_2),$$

решить заданное неравенство методом интервалов. Но для решения квадратных неравенств у нас имеется проверенный и надежный метод, который мы вспомнили в предыдущем параграфе. Отметим корни x_1 и x_2 на оси x, учтя при этом, что $x_2 < x_1$, и построим (схематически) параболу $y = 3x^2 - 2x - 2$; главное — учесть, что ветви этой параболы направлены вверх (рис. 21). Выбираем промежуток, на котором график расположен под осью x, — это интервал $(x_2; x_1)$. Выше мы отметили, что $x \neq 0$, придется точку $x = 0$ «выколоть». Вот теперь рис. 21 дает полную геометрическую иллюстрацию решения заданного неравенства.

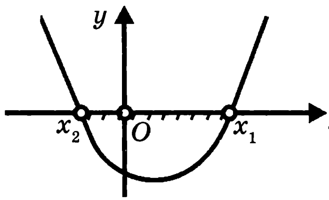


Рис. 21

Ответ: $\frac{1 - \sqrt{7}}{3} < x < 0$; $0 < x < \frac{1 + \sqrt{7}}{3}$.

§ 3. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. Понятие множества

Знаменитый итальянский физик, механик, астроном и математик Галилео Галилей (1564—1642) писал: «Великая книга Природы написана языком математики». За многовековую историю развития человечества не только изменялись знания людей о законах природы, но и самым существенным образом менялся язык, на котором в разные времена были записаны эти законы, — сам язык математики.

Вот, например, цитата из работы «Китаб аль-джебр вальмукабала» среднеазиатского ученого Мухаммеда ибн Мусы ал-Хорезми (первая половина IX в. н. э.), который, по существу, первым ввел сам термин «алгебра»:

«...Что касается квадратов и корней, равных числу, то если, например, ты скажешь: квадрат и десять его корней равны 39 дирхемам, то это означает, что, если добавить к некоторому квадрату то, что равно десяти корням, получится 39. Правило таково: раздвой число корней, получится в этой задаче пять, умножь это на равное ему, будет 25. Прибавь это к 39, будет 64. Извлеки из этого корень, будет 8, и вычти из этого половину числа корней, т. е. 5, останется 3: это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат есть 9...»

С заметным трудом современный читатель поймет, что речь идет о решении квадратного уравнения $x^2 + 10x = 39$ и нахождении его корня: $x = -5 + \sqrt{25 + 39} = -5 + \sqrt{64} = 3$ (корень $x = -13$ вообще не рассматривался).

Современный математический язык более краток и в первую очередь заменяет естественный, разговорный язык специальными буквенными и символьными выражениями. Он более формализован и унифицирован, т. е. подходит к рассмотрению сразу многих однотипных случаев. Еще более формализованны, например, различные языки программирования. В них уже математический язык по жестким и заранее описанным правилам переводится на язык компьютера.

В этом параграфе мы рассмотрим простейшие понятия и обозначения *языка теории множеств*, который вот уже более 100 лет составляет фундамент современного математического языка.

Множество состоит из элементов. Если этих элементов немного, то удобно все элементы просто перечислить в каком-нибудь порядке. Чтобы не забыть, что перечисляемые элементы объединены вместе в некоторое множество, такое перечисление производят внутри фигурных скобок { , }. Вот некоторые примеры.

Словесное описание множества	Поэлементное описание множества	Задание множества перечислением его элементов
Цифры десятичной системы счисления	Множество состоит из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9	{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}
Гласные буквы русского алфавита	Множество состоит из букв *А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*	{*А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*}
Корни уравнения $x^2 + 10x = 39$	Множество состоит из чисел 3 и −13	{−13; 3}
Первый и второй Президенты Российской Федерации	Множество состоит из двух людей: Ельцина и Путина	{Ельцин, Путин}

Элементы множества можно перечислять в произвольном порядке. От изменения порядка перечисления элементов само множество не меняется. Например, {*А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*} и {*Я*, *И*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Ё*, *О*, *У*, *А*, *Е*} — это одно и то же множество, состоящее из всех гласных букв русского алфавита.

Замечание 1. Если множество состоит из чисел, то при их перечислении иногда удобнее использовать не запятую, а знак препинания « ; » — точку с запятой. Вот типичный пример. Запись {−13; 3} ясно указывает, что множество состоит из двух чисел −13 и 3, а в записи {−13, 3} «перечислительную» запятую можно спутать с «десятичной» запятой и подумать, что множество состоит из одного отрицательного числа −13,3.

Чаще всего мы будем заниматься *числовыми* множествами, т. е. множествами, элементами которых являются числа. Для числовых множеств есть естественный порядок перечисления их элементов от меньшего числа к большему числу.

Пример 1. Множество A состоит из всех корней уравнения $x^4 + x^2 - 6x = 0$.

а) Решить это уравнение.

б) Задать множество A перечислением его элементов.

в) Записать все возможные способы перечисления элементов множества A.

г) Сколько всего имеется способов перечисления элементов множества A?

Р е ш е н и е. а) $x^3 + x^2 - 6x = 0$;

$$x(x^2 + x - 6) = 0;$$

$$x = 0 \text{ или } x^2 + x - 6 = 0;$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2.$$

б) Перечислим корни, например в порядке возрастания. Получим: $A = \{-3, 0, 2\}$.

в) Нам следует три разных числа расставить по трем разным местам. Если на первом месте стоит -3, то для двух оставшихся чисел и двух оставшихся мест есть два варианта: $\{-3, 0, 2\}$ и $\{-3, 2, 0\}$. Если на первом месте стоит 0, то также имеется два варианта: $\{0, 2, -3\}$ и $\{0, -3, 2\}$. Если на первом месте стоит 2, то имеется еще два варианта: $\{2, -3, 0\}$ и $\{2, 0, -3\}$.

Таким образом, получаем 6 вариантов записи множества A: $\{-3, 0, 2\}$, $\{-3, 2, 0\}$, $\{0, -3, 2\}$, $\{0, 2, -3\}$, $\{2, -3, 0\}$, $\{2, 0, -3\}$.

г) Все способы перечисления уже найдены в пункте в). Их 6. ■

Допустим, что в примере 1 речь идет не об уравнении $x^3 + x^2 - 6x = 0$, а об уравнении $x^{2008} + 2008 = 0$. Так как $x^{2008} + 2008 \geqslant 2008 > 0$ для любого x, то в пункте а) следует ответить, что корней нет. А как быть с пунктом б)? Ведь перечислять тут нечего. Для разрешения этой ситуации математики ввели специальное обозначение $\varnothing$. Так обозначается *пустое множество*, т. е. множество, не содержащее ни одного элемента. Фигурные скобки у знака $\varnothing$ не ставят, так как никакого перечисления элементов пустого множества не происходит: этих элементов просто нет.

Если число элементов множества достаточно велико (например, несколько десятков, сотен и т. д.) или если множество бесконечно (например, множество всех натуральных или множество всех целых чисел), то явное перечисление элементов такого множества невозможно. Способы задания, описания таких множеств весьма разнообразны. Вот некоторые из них.

	Множество	Словесное описание множества
1)	$\{10, 15, 20, ..., 90, 95\}$	Множество всех двузначных чисел, кратных 5
2)	$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$	Множество всех квадратов натуральных чисел

Окончание табл.

	Множество	Словесное описание множества
3)	N	Множество натуральных чисел
4)	Q	Множество рациональных чисел
5)	$\{x \mid 2 < x < 7\}$	Множество всех чисел, которые больше 2 и меньше 7
6)	$(2; 7)$	Множество всех чисел, которые больше 2 и меньше 7

В случаях 1) и 2) по нескольким предъявленным элементам множества мы по аналогии *догадываемся* о том, как устроено все множество целиком. Этот способ в том или ином виде использует словесный оборот «...и так далее».

Некоторые числовые множества столь часто встречаются в различных разделах математики, что для них ввели специальные обозначения. Именно так обстоит дело в случаях 3) и 4), а также, например, для множества целых чисел, которое обозначают $\boldsymbol{Z}$, или для множества действительных чисел, которое обозначают $\boldsymbol{R}$.

В случае 5) множество задано с помощью его *характеристического свойства*. Это один из самых распространенных способов задания множества. Символ « | » внутри фигурных скобок является заменой комбинации слов «...таких, что...». Можно прочитать запись $\{x \mid 2 < x < 7\}$ шаг за шагом:

Символ	Как читается
$\{...\}$	Множество...
$\{x...\}$	Множество всех x...
$\{x \mid ...\}$	Множество всех x таких, что...
$\{x \mid 2 < x < 7\}$	Множество всех x таких, что $2 < x < 7$

Наконец, в случае 6), как и в случаях 3) и 4), множество задано с помощью специального обозначения. Здесь мы имеем дело с одним из наиболее типичных примеров числовых множеств — с интервалом. Наряду с интервалами мы очень часто встречаемся и с другими *числовыми промежутками*. Например, $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a; b]$ — отрезок с концами a и b; $\{x \mid x < b\} = (-\infty; b)$ — открытый луч с концом в точке b.

П р и м е р 2. По указанному заданию множества дать его словесное описание:

а) $\{0, 2, 4, 6, 8\}$; б) $\{2, 4, 6, ..., 18, 20\}$; в) $\{12, 22, 32, ..., 92\}$; г) $\{1, 8, 27, 64, 125, ...\}$.

Р е ш е н и е. Словесные описания одного и того же множества могут выглядеть по-разному. Ведь в естественном, разговорном языке одну и ту же мысль, идею и т. п. можно выразить поразному. Поэтому в скобках приведем и другие возможные варианты ответов.

а) Множество всех четных цифр (все цифры, кроме цифр 1, 3, 5, 7, 9);

б) множество всех четных натуральных чисел, которые меньше 21 (все числа, полученные из чисел 1, 2, ..., 9, 10 умножением на 2);

в) множество всех двузначных чисел, оканчивающихся цифрой 2 (все числа вида $10x + 2$, где x ненулевая цифра);

г) множество всех кубов натуральных чисел (множество значений функции $y = x^3$ для натуральных значений аргумента x). ◼

П р и м е р 3. Решив соответствующее неравенство, записать заданное числовое множество в виде числового промежутка:

а) $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$;

в) $\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{x} > 0\right\}$;

б) $\left\{x \,\middle|\, \frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15}\right\}$;

г) $\{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$.

Р е ш е н и е. а) Прочтем запись $\{x \mid x^2 + 1 > 0\}$ шаг за шагом. Следует найти множество всех x таких, что $x^2 + 1 > 0$. Это неравенство верно для всех действительных чисел. Получаем ответ: вся числовая прямая; в символьной записи: $(-\infty; +\infty)$ или $\boldsymbol{R}$.

б) Следует найти множество всех x таких, что

$$\frac{x}{3} + \frac{2x-1}{5} > 2x - \frac{1}{15},$$

т. е. решить это неравенство. Его мы уже решили (см. § 1, пример 1) и получили ответ: $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right)$.

в) Следует найти множество решений (можно говорить короче: решение) неравенства $\frac{1}{x} > 1$. Имеем:

$$\frac{1}{x} > 1;\ \frac{1}{x} - 1 > 0;\ \frac{1-x}{x} > 0;\ \frac{x-1}{x} < 0.$$

Воспользовавшись методом интервалов (рис. 22), получаем в качестве решения неравенства интервал (0; 1).

г) $35x^2 \leqslant 24x + 35$; $35x^2 - 24x - 35 \leqslant 0$;

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{12^2 + 35^2}}{35} = \frac{12 \pm \sqrt{1369}}{35} = \frac{12 \pm 37}{35};$$

$$x_1 = \frac{-25}{35} = -\frac{5}{7},\quad x_2 = \frac{49}{35} = \frac{7}{5}.$$

Ветви параболы $y = 35x^2 - 24x - 35$ направлены вверх. Поэтому множество решений неравенства $35x^2 - 24x - 35 \leqslant 0$ — это отрезок между корнями $x_1 = -\frac{5}{7}$ и $x_2 = \frac{7}{5}$ (рис. 23).

О т в е т: а) $\boldsymbol{R}$; б) $\left(-\infty; -\frac{2}{17}\right)$; в) (0; 1); г) $\left[-\frac{5}{7}; \frac{7}{5}\right]$.

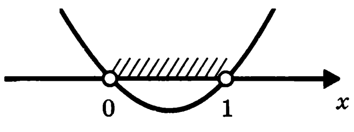


Рис. 22

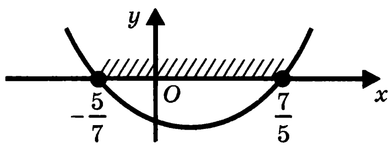


Рис. 23

Такие словесные обороты, как «элемент x принадлежит множеству A» или «x является элементом множества A», достаточно длинны и не всегда удобны в записи решений конкретных задач. В математике эти выражения более кратко записывают так: $x \in A$ (мы уже пользовались этим обозначением). Смысл *знака принадлежности* $\in$ легко запомнить: $\in$ — это перевернутая буква «Э», т. е. буква, с которой как раз и начинается слово «элемент». Наряду со знаком принадлежности $\in$ используют и его «отрицание» —

знак $\notin$. Запись $x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A. Приведем примеры использования этих знаков:

$3 \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$, а $13 \notin \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

У $\in$ {*А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*}, но Ь $\notin$ {*А*, *Е*, *Ё*, *И*, *О*, *У*, *Ы*, *Э*, *Ю*, *Я*};

$2007 \in N$, тогда как $200{,}7 \notin N$;

$0 \in \{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$, а $2 \notin \{x \mid 35x^2 \leqslant 24x + 35\}$ и т. п.

Заметим, что если неверно, что $x \in A$, то верно, что $x \notin A$. Наоборот, если верно, что $x \in A$, то неверно, что $x \notin A$.

Пример 4. Верно ли, что:

а) $0 \in N$; б) $0 \in Z$; в) $1 \in \{x \mid x^7 - 6x^6 + 3x^3 + 1 < 0\}$;

г) $1 \in \left\{x \middle| \sqrt{x^2 - 2} > 30\right\}$?

Решение. а) Нет, 0 не является натуральным числом. Значит, $0 \notin N$.

б) Да. Более того, само обозначение Z множества целых чисел получено от первой буквы слова «Zero» — нуль.

в) Да. Подставим $x = 1$ в неравенство $x^7 - 6x^6 + 3x^3 + 1 < 0$. Получим верное числовое неравенство $-1 < 0$.

г) Нет. При $x = 1$ не определена левая часть неравенства $\sqrt{x^2 - 2} > 30$. ◼

Замечание 2. Пункты в) и г) примера 4 показывают, как проверять справедливость утверждения $x \in A$ в тех случаях, когда множество A задано с помощью характеристического свойства. Следует просто проверить, верно это свойство для конкретного числа x или нет. Ответ «да» означает, что $x \in A$, а ответ «нет» означает, что $x \notin A$.

2. Подмножество

Элементы, образующие данное множество A, можно объединять не сразу все вместе, а группируя их в разных комбинациях. Так можно получать различные *подмножества* данного множества.

Например, если множество состоит из элементов □, ✦, ●, можно составить ровно три подмножества, которые состоят из двух элементов. Это {□, ✦}, {□, ●} и {✦, ●}. Рассмотрим пример посложнее.

Пример 5. На поле в составе футбольной команды должны выйти двое нападающих, а у тренера команды есть четыре кандидата x, y, z и t на эти позиции.

а) Из скольких вариантов придется выбирать тренеру?

б) Как изменится ответ в а), если игрок x не может играть вместе с игроком y?

в) Как изменится ответ в а), если игрок z может играть только вместе с игроком t?

г) Как изменится ответ в а), если на поле должны выйти трое нападающих?

Р е ш е н и е. Сначала мы должны понять, при чем здесь множества, элементы и подмножества. $A = \{x, y, z, t\}$ — это множество, из которого тренеру следует выбрать двоих нападающих, т. е. выбрать два элемента. Значит, задача свелась к выбору различных двухэлементных подмножеств данного множества $A = \{x, y, z, t\}$.

а) Перечислим варианты, в которых участвует игрок x. Это $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{x, t\}$. Для игрока y один вариант $\{x, y\}$ уже учтен, остались варианты $\{y, z\}$ и $\{y, t\}$. Для игрока z два варианта $\{x, z\}$ и $\{y, z\}$ уже учтены, остался один вариант $\{z, t\}$. Для игрока t все варианты выхода на игру уже указаны. Итак, тренеру придется выбирать из шести вариантов: $\{x, y\}$, $\{x, z\}$, $\{x, t\}$, $\{y, z\}$, $\{y, t\}$, $\{z, t\}$.

б) Из перечисленных вариантов следует убрать $\{x, y\}$. Останется пять вариантов.

в) Из перечисленных вариантов следует убрать $\{x, z\}$ и $\{y, z\}$. Останется четыре варианта.

г) Тут следует посчитать все трехэлементные подмножества данного множества $A = \{x, y, z, t\}$. Вот они: $\{x, y, z\}$ (отсутствует t), $\{x, y, t\}$ (отсутствует z), $\{x, z, t\}$ (отсутствует y), $\{y, z, t\}$ (отсутствует x). Всего четыре варианта (рис. 24).

О т в е т: а) 6; б) 5; в) 4; г) 4.

А сколько всего имеется подмножеств у четырехэлементного множества? Будем рассуждать как в примере 5. Соберем все сведения в таблицу.

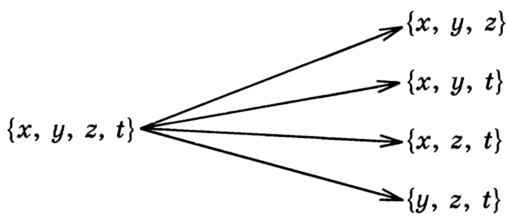


Рис. 24

	Число нападающих				
	0	1	2	3	4
Варианты составов нападающих	Нападающих нет совсем	$\{x\}$, $\{y\}$, $\{z\}$, $\{t\}$	$\{x, y\}$, $\{x, z\}$ $\{x, t\}$, $\{y, z\}$ $\{y, t\}$, $\{z, t\}$	$\{x, y, z\}$, $\{x, y, t\}$, $\{x, z, t\}$, $\{y, z, t\}$	$\{x, y, z, t\}$
Количество вариантов	1	4	6	4	1

Итак, у четырехэлементного множества есть 4 одноэлементных подмножества, 6 двухэлементных подмножеств, 4 трехэлементных подмножества, 1 четырехэлементное подмножество и 1 подмножество, в котором вообще нет элементов, т. е. пустое множество. Всего получилось $1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16$ разных подмножеств.

В общем виде определение подмножества выглядит так.

Определение 1. Если каждый элемент множества B является элементом множества A, то множество B называют **подмножеством** множества A. Обозначение: $B \subset A$. Знак «$\subset$» называют знаком **включения**.

Если множества A и B являются плоскими фигурами (точнее, множествами точек, из которых состоят фигуры A и B), то включение $B \subset A$ означает, что фигура B целиком расположена в фигуре A (рис. 25).

Пример 6. На рис. 26 изображены четыре плоские фигуры: круг A, прямоугольник B, треугольник C и D — часть плоскости,

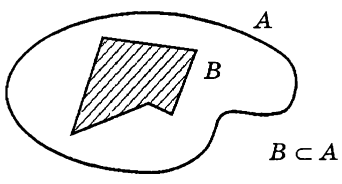


Рис. 25

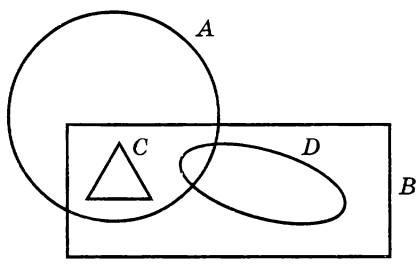
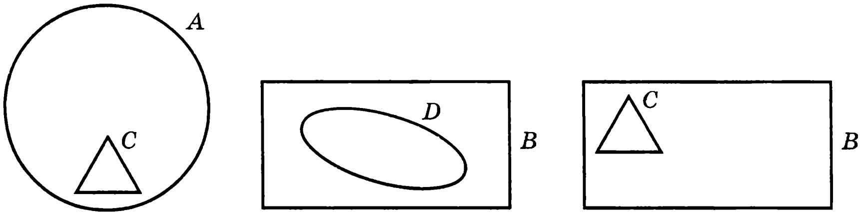


Рис. 26



$C \subset A$ $D \subset B$ $C \subset B$

Рис. 27

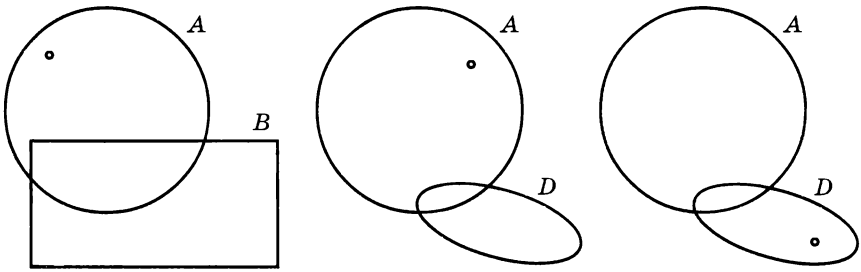
ограниченная овалом. Какие из включений $A \subset B$, $C \subset A$, $D \subset B$, $A \subset D$, $C \subset B$, $D \subset A$:

а) верны; б) неверны?

Р е ш е н и е. а) Включения $C \subset A$, $D \subset B$, $C \subset B$ верны. Мы изобразим их попарно (рис. 27).

б) Включения $A \subset B$, $A \subset D$, $D \subset A$ неверны. Мы так же изобразим их попарно и в каждом случае отдельно отметим некоторую точку, которая принадлежит левой части включения, но не принадлежит правой части (рис. 28). ◼

Замечание 3. Знаки принадлежности $\in$ и включения $\subset$ несколько похожи друг на друга. Однако это принципиально разные знаки и их не следует путать. Например, запись $1 \subset \{1, 2, 3\}$ ошибочна, так как в ее левой части находится не множество. В то же время с записью $1 \in \{1, 2, 3\}$ все в порядке: она означает, что число 1 является элементом множества $\{1, 2, 3\}$. Запись $[1; 2] \in (0; 3)$ ошибочна, так как



Неверно, что $A \subset B$ Неверно, что $A \subset D$ Неверно, что $D \subset A$

Рис. 28

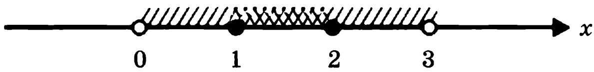


Рис. 29

в ее левой части находится не элемент множества, а некоторое множество. А вот запись $[1; 2] \subset (0; 3)$, как говорят, корректна; геометрически она означает, что отрезок $[1; 2]$ целиком содержится в интервале $(0; 3)$ (рис. 29).

3. Пересечение и объединение множеств

Изображение множеств в виде плоских фигур очень удобно для наглядного объяснения различных *операций над множествами.* Обычно множества при этом изображают в виде некоторых кругов. Такие круги называют *кругами Эйлера* в честь великого швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707—1783), который долгое время работал в России. Начнем с операции *пересечения* множеств.

Определение 2. **Пересечением множеств** A и B называют множество, состоящее из всех общих элементов множеств A и B, т. е. из всех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 30). Пересечение множеств A и B обозначают так: $A \cap B$.

Используя уже известные способы задания множеств, это определение можно перевести из словесной формы записи в формульную:

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.}$$

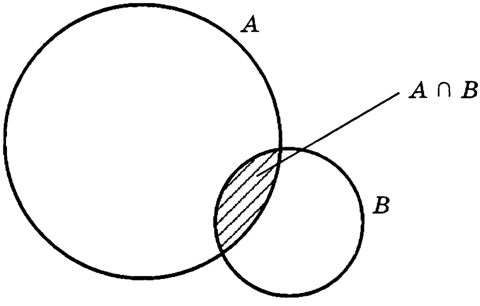


Рис. 30

Пример 7. Найти пересечение множеств A и B, если:

а) $A = \{11, 22, ..., 88, 99\}$, $B = \{3, 6, 9, ...\}$;

б) A — множество различных букв, используемых в слове «перераспределение», B — множество различных букв, используемых в слове «реформирование».

в) $A = (1; \sqrt{10})$, $B = N$.

Решение. а) A — это множество всех двузначных чисел, кратных 11, B — это множество всех натуральных чисел, кратных 3. Число x принадлежит и множеству A, и множеству B, если оно двузначно и кратно как 11, так и 3, т. е. кратно 33. Таких чисел имеется ровно три: 33, 66 и 99.

Итак, $A \cap B = \{33, 66, 99\}$.

б) Выпишем все встречающиеся в указанных словах буквы по одному разу: A = {п, е, р, а, с, д, л, н, и}, В = {р, е, ф, о, м, и, в, а, н}. Рассмотрим по очереди все элементы первого множества. Так как п $\in A$, но п $\notin B$, то буква «п» не является общей для множеств A и B. Значит, п $\notin A \cap B$. Так как е $\in A$ и е $\in B$, то буква «е» является общей для множеств A и B. Значит, е $\in A \cap B$. Перебирая таким же образом остальные буквы множеств A и B, получаем: $A \cap B$ = {е, р, а, н, и}.

в) Число 1 принадлежит множеству $B = N$, но не принадлежит множеству $A = (1; \sqrt{10})$: конец интервала не входит в сам интервал. Значит, $1 \notin A \cap B$. Так как $3 < \sqrt{10} < 4$, то числа 2 и 3 принадлежат и множеству A, и множеству B. Значит, $2 \in A \cap B$ и $3 \in A \cap B$. Все натуральные числа, начиная с 4, лежат вне интервала $(1; \sqrt{10})$. Значит, все эти числа не принадлежат пересечению $A \cap B$.

Итак, $A \cap B = \{2; 3\}$ (рис. 31). ◼

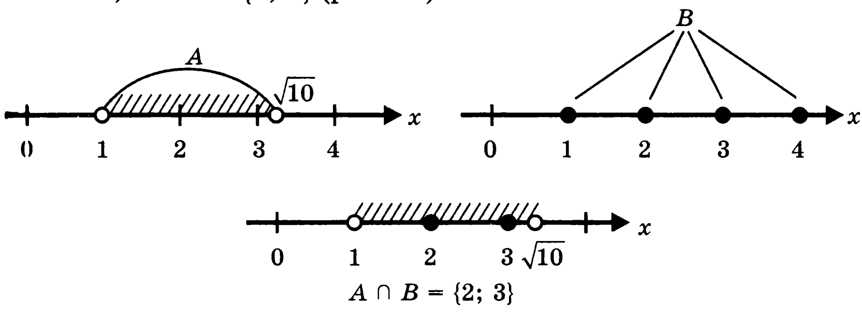


Рис. 31

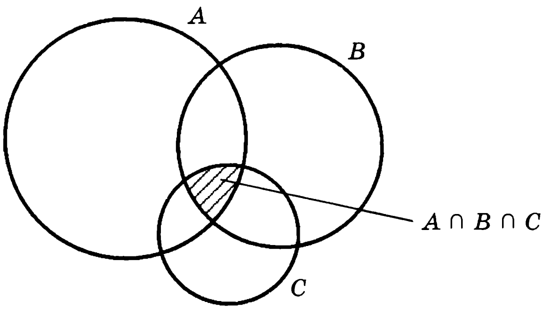


Рис. 32

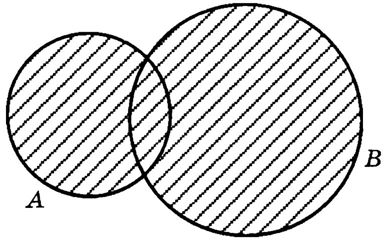
Можно рассматривать пересечения не только двух, но и трех, четырех и т. д. множеств. Например, *пересечением* множеств A, B и C называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B, и множеству C (рис. 32). Пересечение множеств A, B и C обозначают так: $A \cap B \cap C$.

Замечание 4. Вот классический пример из русской литературы, связанный с одновременным выполнением нескольких условий. В комедии Н. В. Гоголя «Женитьба» главная героиня, невеста Агафья Тихоновна, рассуждает так: «...Если бы губы Никанора Ивановича да приставить к носу Ивана Кузьмича, да взять сколько-нибудь развязности, какая у Балтазара Балтазарыча, да, пожалуй, прибавить к этому еще дородности Ивана Павловича — я бы тогда тотчас бы решилась...»

У четырех разных женихов есть четыре разных свойства, и невеста мечтает о том, чтобы молодой человек обладал сразу всеми свойствами. С точки зрения теории множеств Агафья Тихоновна исследует вопрос о непустоте пересечения четырех различных множеств.

Использование операции пересечения множеств в математике соответствует использованию союза «и» в русском языке. Родственный ему союз «или» связан с другой операцией над множествами — *операцией объединения*.

Определение 3. **Объединением множеств** A и B называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств — или множеству A, или множеству B (рис. 33). Объединение множеств A и B обозначают так: $A \cup B$.



$A \cup B$

Рис. 33

Как и в случае пересечения, это определение можно перевести из словесной формы записи в формульную:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пример 8. Найти объединение множеств A и B, если:

а) A — множество делителей числа 105, B — множество делителей числа 55;

б) A — множество цифр записи числа 3^5, B — множество цифр записи числа 2^{10};

в) $A = (1; \sqrt{10})$, $B = [2; 4]$;

г) A — множество точек координатной плоскости, у которых абсцисса больше 3, B — множество точек координатной плоскости, у которых ордината не больше 2.

Решение.

а) Разложим на простые множители числа 105 и 55. Так как $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$, а $55 = 5 \cdot 11$, то $A = \{1, 3, 5, 7, 15, 21, 35, 105\}$, а $B = \{1, 5, 11, 55\}$. Возьмем все элементы множества A, а затем те элементы множества B, которые не встречались в A, т. е. добавим 11 и 55. Значит,

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 7, 11, 15, 21, 35, 55, 105\}.$$

б) $3^5 = 243$, $2^{10} = 1024$. Значит, $A = \{2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 4\}$. Поступим как и в пункте а). Получим: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

в) Тут удобнее работать с числовой прямой. Данные множества (числовые промежутки) $A = (1; \sqrt{10})$ и $B = [2; 4]$ пересекаются, но ни одно из них не содержится целиком в другом (рис. 34).

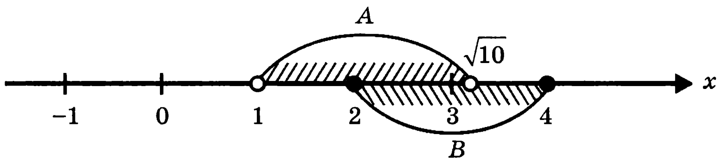


Рис. 34

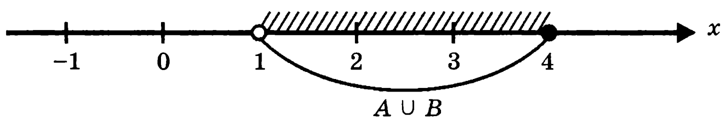


Рис. 35

Используем для этих множеств различные штриховки и затем посмотрим, какое числовое множество в итоге мы заштриховали: $A \cup B = (1; 4]$ (рис. 35).

г) Здесь тоже удобнее использовать чертеж. Множество A — это множество всех точек, лежащих правее вертикальной прямой $x = 3$ (рис. 36). Множество B — это множество всех точек, лежащих ниже горизонтальной прямой $y = 2$ или на самой этой прямой (рис. 37).

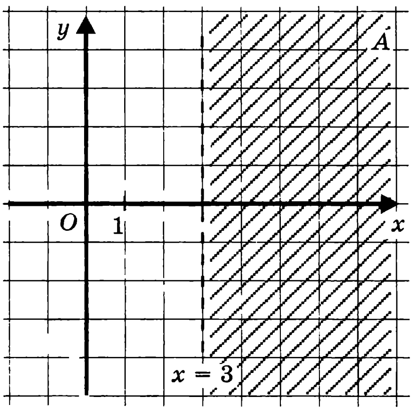


Рис. 36

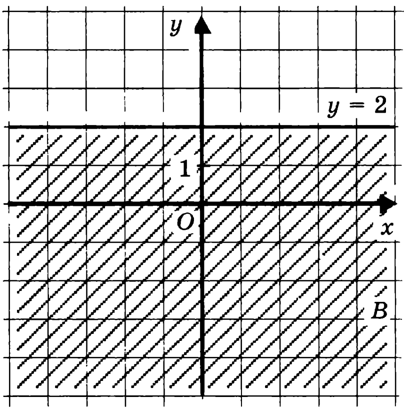
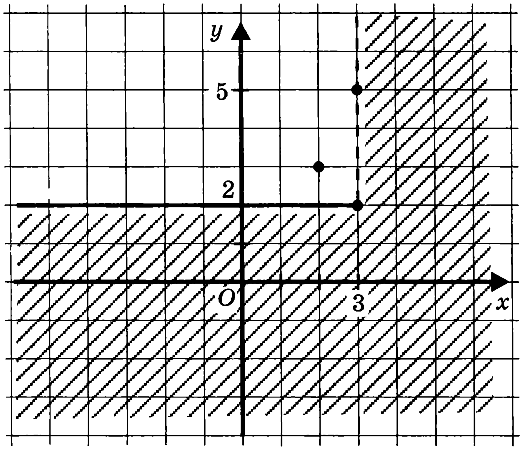
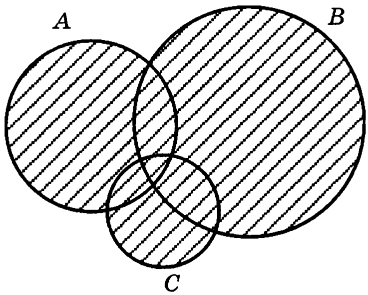


Рис. 37



$(2;\ 3) \notin A \cup B$
$(3;\ 2) \in A \cup B$
$(3;\ 5) \notin A \cup B$

Рис. 38



$A \cup B \cup C$

Рис. 39

Тогда $A \cup B$ — это множество всех тех точек плоскости, которые мы заштриховали первым или вторым способом (рис. 38). Отметим для примера, что точка (3; 2) принадлежит объединению $A \cup B$, а точки (2; 3) и (3; 5) ему не принадлежат. ◼

Как и для пересечений, можно рассматривать объединения не только двух, но и трех, четырех и т. д. множеств. Например, *объединением* множеств A, B и C называют множество, состоящее из всех элементов, которые принадлежат или множеству A, или множеству B, или множеству C (рис. 39). Объединение множеств A, B и C обозначают так: $A \cup B \cup C$.

Замечание 5. Знаки пересечения «$\cap$» и объединения «$\cup$» учащиеся часто путают. Вот несколько советов по их запоминанию. Знак объединения «$\cup$» похож на первую букву английского слова *Union* — объединение. Другой способ: операция объединения $\cup$ — это открытый мешок, в который ссыпаются элементы объединяемых множеств. Значит, $A \cup B$ содержит в себе все элементы обоих множеств A и B и не содержит никаких других элементов. Если вы хорошо запомнили знак объединения «$\cup$», то знак пересечения «$\cap$» — это просто другой оставшийся знак. Можно также заметить, что «$\cap$» несколько напоминает русскую букву «П», с которой начинается слово «пересечение».

§ 4. СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ

Рассмотрим два примера, решение которых, как мы увидим, приведет к новой (для вас) математической модели — системе неравенств.

Пример 1. Найти область определения выражения

$$f(x) = \sqrt{2x-4} + \sqrt{8-x}.$$

Решение. Выражение, содержащееся под знаком квадратного корня, должно быть неотрицательным, значит, должны одновременно выполняться два неравенства: $2x - 4 \geqslant 0$ и $8 - x \geqslant 0$. В таких случаях говорят, что задача сводится к решению *системы неравенств*

$$\begin{cases} 2x - 4 \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Но с такой математической моделью (системой неравенств) мы еще не встречались. Вернемся к решению этого примера позднее.

Пример 2. Задумано натуральное число. Известно, что если к квадрату задуманного числа прибавить 13, то сумма будет больше произведения задуманного числа и числа 14. Если же к квадрату задуманного числа прибавить 45, то сумма будет меньше произведения задуманного числа и числа 18. Какое число задумано?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — задуманное число. По первому условию сумма чисел x^2 и 13 больше числа $14x$; это значит, что должно выполняться неравенство $x^2 + 13 > 14x$. По второму условию сумма чисел x^2 и 45 меньше числа $18x$; это значит, что должно выполняться неравенство $x^2 + 45 < 18x$. Указанные неравенства должны выполняться одновременно, следовательно, речь идет о решении системы неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 13 > 14x, \\ x^2 + 45 < 18x. \end{cases}$$

Пока придется повременить с переходом ко второму этапу решения задачи — этапу работы с составленной математической моделью. Сначала надо изучить новую модель — систему неравенств.

Определение. Несколько неравенств с одной переменной x образуют **систему неравенств**, если ставится задача найти все такие значения переменной, при которых каждое из заданных неравенств с переменной обращается в верное числовое неравенство. Любое такое значение x называют **решением** (или **частным решением**) **системы неравенств**.

Множество всех решений (частных решений) системы неравенств представляет собой **общее решение системы неравенств** (чаще говорят просто — **решение системы неравенств**).

Неравенства, образующие систему, объединяются фигурной скобкой (так же, как вы знаете, обстоит дело и в системах уравнений). Например, запись

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11 \end{cases}$$

означает, что неравенства $2x - 1 > 3$ и $3x - 2 < 11$ образуют систему неравенств.

Иногда используется запись системы неравенств в виде *двойного неравенства*. Например, систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 2x - 1 < 11 \end{cases}$$

можно записать в виде двойного неравенства $3 < 2x - 1 < 11$.

Рассмотрим систему неравенств

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11. \end{cases}$$

Можно подобрать несколько ее частных решений, например $x = 3$, $x = 4$, $x = 3{,}5$. В самом деле, при $x = 3$ первое неравенство принимает вид $5 > 3$, а второе — вид $7 < 11$. Получились два верных числовых неравенства, значит, $x = 3$ — частное решение системы неравенств. Точно так же можно убедиться в том, что $x = 4$, $x = 3{,}5$ — частные решения системы неравенств.

В то же время значение $x = 5$ не является частным решением системы неравенств. При $x = 5$ первое неравенство принимает вид $9 > 3$ — верное числовое неравенство, а второе — вид $13 < 11$, это неверное числовое неравенство.

Решить систему неравенств — значит найти все ее частные решения. Ясно, что такое угадывание, которое продемонстрировано выше, — не метод решения системы неравенств. Как же решить систему неравенств $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0? \end{cases}$

Пусть X_1 — решение неравенства $f(x) > 0$ (множество частных решений), а X_2 — решение неравенства $g(x) > 0$ (множество частных решений). Нас интересуют те и только те значения x, которые принадлежат и множеству X_1, и множеству X_2. Значит (см. § 3), нас интересует множество $X_1 \cap X_2$ — это пересечение и является решением заданной системы неравенств.

Пример 3. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 < 11; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x - 1 \leqslant 3, \\ 3x - 2 \geqslant 11. \end{cases}$

Решение. а) Решая первое неравенство системы, находим: $2x > 4$; $x > 2$. Решая второе неравенство системы, находим: $3x < 13$; $x < \frac{13}{3}$, т. е. $x < 4\frac{1}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для выделения первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 40). Решением системы неравенств будет *пересечение решений* неравенств системы, т. е. промежуток (или несколько промежутков), на котором обе штриховки совпали. В рассматриваемом примере получаем интервал $\left(2; 4\frac{1}{3}\right)$.

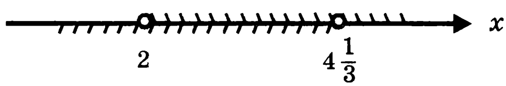


Рис. 40

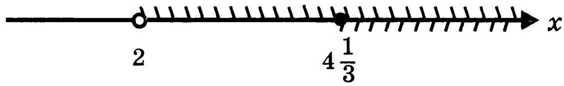


Рис. 41

б) Решая первое неравенство системы, находим: $x > 2$; решая второе неравенство системы, находим: $x \geqslant 4\frac{1}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 41). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы. В рассматриваемом примере получаем луч $\left[4\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

в) Решая первое неравенство системы, находим: $x \leqslant 2$; решая второе неравенство системы, находим: $x \geqslant 4\frac{1}{3}$. Отметим эти промежутки на одной координатной прямой, использовав для первого промежутка верхнюю штриховку, а для второго — нижнюю штриховку (рис. 42). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы, т. е. промежуток, на котором обе штриховки совпали. Здесь такой общей части нет, значит, система неравенств не имеет решений.

О т в е т: а) $2 < x < 4\frac{1}{3}$; б) $x \geqslant 4\frac{1}{3}$; в) нет решений (иногда это словосочетание, напомним, заменяют символом пустого множества $\varnothing$).

Обобщим рассуждения, проведенные в рассмотренном примере. Предположим, что нам нужно решить систему неравенств

$$\begin{cases} f_1(x) > g_1(x), \\ f_2(x) > g_2(x). \end{cases}$$

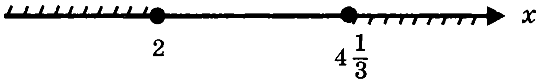


Рис. 42

Пусть, например, интервал $(a; b)$ является решением неравенства $f_1(x) > g_1(x)$, а интервал $(c; d)$ — решением неравенства $f_2(x) > g_2(x)$ (рис. 43). *Решением системы неравенств является пересечение решений неравенств системы.* В рассматриваемом случае это интервал $(c; b)$ (рис. 43).

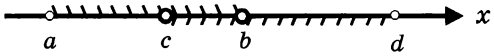


Рис. 43

Теперь мы без особого труда сможем решить систему неравенств, которую получили выше, в примере 1:

$$\begin{cases} 2x - 4 \geqslant 0, \\ 8 - x \geqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое неравенство системы, находим: $x \geqslant 2$; решая второе неравенство системы, находим: $x \leqslant 8$. Отметим эти промежутки (лучи) на одной координатной прямой (рис. 44). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы — отрезок $[2; 8]$. Это область определения того выражения, о котором шла речь в примере 1.

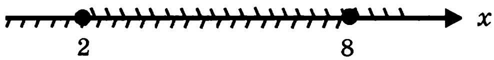


Рис. 44

Разумеется, система неравенств не обязательно должна состоять из линейных неравенств, как было до сих пор; могут встретиться любые рациональные (а в дальнейшем и не только рациональные) неравенства. Технически работа с системой рациональных нелинейных неравенств, конечно, сложнее, но принципиально нового (по сравнению с системами линейных неравенств) здесь ничего нет.

Пример 4. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 - 9 \geqslant 0, \\ 5x - x^2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. 1) Решим неравенство $x^2 - 9 \geqslant 0$, т. е.

$$(x - 3)(x + 3) \geqslant 0.$$

Отметим точки -3 и 3 на числовой прямой (рис. 45). Они разбивают прямую на три промежутка, причем на каждом промежутке

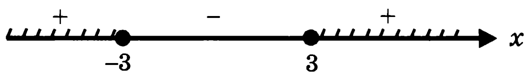


Рис. 45

выражение $p(x) = (x - 3)(x + 3)$ сохраняет постоянный знак — эти знаки указаны на рис. 45. Нас интересуют промежутки, на которых выполняется неравенство $p(x) > 0$ (они заштрихованы на рис. 45), и точки, в которых выполняется равенство $p(x) = 0$, т. е. точки $x = -3$, $x = 3$ (они отмечены на рис. 45 темными кружочками). Таким образом, на рис. 45 представлена геометрическая иллюстрация решения первого неравенства.

2) Решим неравенство $5x - x^2 \geqslant 0$, т. е.

$$x(5 - x) \geqslant 0.$$

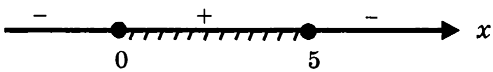


Рис. 46

Отметим точки 0 и 5 на числовой прямой (рис. 46). Они разбивают прямую на три промежутка, причем на каждом промежутке выражение $q(x) = x(5 - x)$ сохраняет постоянный знак — эти знаки указаны на рис. 46. Нас интересует, где выполняется неравенство $q(x) > 0$ (соответствующий промежуток заштрихован на рис. 46); нужны нам и точки, в которых выполняется равенство $q(x) = 0$, т. е. точки $x = 0$, $x = 5$ (они отмечены на рис. 46 темными кружочками). Таким образом, на рис. 46 представлена геометрическая иллюстрация решения второго неравенства системы.

3) Отметим найденные решения первого и второго неравенств системы на одной координатной прямой, использовав для решений первого неравенства верхнюю штриховку, а для решений второго — нижнюю штриховку (рис. 47). Решением системы неравенств будет пересечение решений неравенств системы. В рассматриваемом примере это отрезок [3; 5].

О т в е т: $3 \leqslant x \leqslant 5$.

Рис. 47

Пример 5. Решить систему неравенств:

а) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ x^2 + x + 2 < 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 1 > 3, \\ x^2 + x + 2 > 0. \end{cases}$

Решение. а) Из первого неравенства находим: $x > 2$. Рассмотрим второе неравенство. Квадратный трехчлен $x^2 + x + 2$ не имеет действительных корней, а его старший коэффициент (коэффициент при x^2) положителен. Значит (см. § 1), при всех x выполняется неравенство $x^2 + x + 2 > 0$, а потому второе неравенство системы не имеет решений. Что это значит для системы неравенств? Это значит, что система не имеет решений.

б) Из первого неравенства находим: $x > 2$. Второе неравенство выполняется при любых значениях x. Что это значит для системы неравенств? То, что ее решение совпадает с решением первого неравенства.

Ответ: а) $\varnothing$; б) $x > 2$.

Данный пример является иллюстрацией для следующих полезных утверждений:

1. *Если в системе из нескольких неравенств с одной перемен ной одно неравенство не имеет решений, то и система не имеет решений.*

2. *Если в системе из двух неравенств с одной переменной одно неравенство выполняется при любых значениях переменной, то решением системы служит решение другого неравенства системы.*

Завершая параграф, вернемся к приведенной в его начале задаче о задуманном числе и решим ее, как говорится, по всем правилам.

Пример 2. Задумано натуральное число. Известно, что если к квадрату задуманного числа прибавить 13, то сумма будет больше произведения задуманного числа и числа 14. Если же к квадрату задуманного числа прибавить 45, то сумма будет меньше произведения задуманного числа и числа 18. Какое число задумано?

Решение. <u>Первый этап.</u> *Составление математической модели.*

Задуманное число x, как мы видели выше (см. с. 41), должно удовлетворять системе неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 13 > 14x, \\ x^2 + 45 < 18x. \end{cases}$$

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Преобразуем первое неравенство системы к виду

$$x^2 - 14x + 13 > 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 14x + 13$: $x_1 = 1$, $x_2 = 13$. Интересующее нас неравенство выполняется при $x < 1$ или $x > 13$ (рис. 48).

Преобразуем второе неравенство системы к виду

$$x^2 - 18x + 45 < 0.$$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 18x + 45$: $x_1 = 3$, $x_2 = 15$. Интересующее нас неравенство выполняется, если $3 < x < 15$ (рис. 49).

Пересечением найденных решений служит интервал (13; 15) (рис. 50).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Нас интересует натуральное число, принадлежащее интервалу (13; 15). Таким числом является число 14.

О т в е т: задумано число 14.

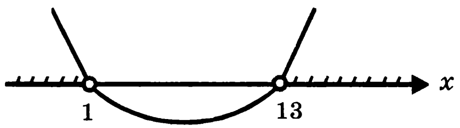


Рис. 48

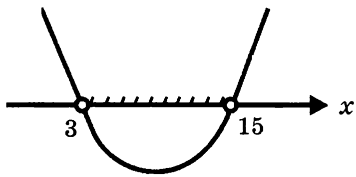


Рис. 49

Рис. 50

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- В этой главе вы познакомились с понятиями, относящимися к решению неравенств с одной переменной:
  частное решение, общее решение, решение неравенства;
  рациональное неравенство;
  равносильные неравенства, равносильное преобразование неравенства;
  система неравенств;
  решение системы неравенств.
- Вы познакомились с методом интервалов, который активно используется при решении рациональных неравенств.
- Вы познакомились с начальными понятиями общепринятого в математике языка теории множеств:
  элемент множества, подмножество данного множества;
  объединение и пересечение множеств;
  пустое множество.

ГЛАВА 2

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 5. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

С системами уравнений вы уже встречались в курсе алгебры 7-го класса, но это были только системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Теперь мы поговорим о решении систем нелинейных уравнений с двумя переменными, тем более что такие системы довольно часто представляют собой математические модели изучаемых ситуаций.

Пример 1. Пристани B и C находятся ниже пристани A по течению реки на 30 км и 45 км соответственно (рис. 51). Моторная лодка отходит от пристани A, доходит до C, сразу поворачивает назад и приходит в B, затратив на весь путь 4 ч 40 мин. В другой раз эта же лодка отошла от пристани C, дошла до A, сразу повернула назад и пришла в B, затратив на весь путь 7 ч. Чему равны собственная скорость лодки и скорость течения реки?

Решение. Введем две переменные:

x км/ч — собственная скорость лодки,

y км/ч — скорость течения реки.

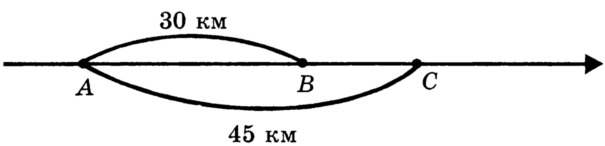


Рис. 51

Тогда $x + y$ км/ч — скорость движения лодки по течению реки,

$x - y$ км/ч — скорость движения лодки против течения реки.

Рассмотрим первый рейс лодки. Он составил 45 км по течению от A до C и 15 км против течения от C до B. Значит,

$\frac{45}{x+y}$ ч — время движения лодки от A до C,

$\frac{15}{x-y}$ ч — время движения лодки от C до B.

Всего на первый рейс лодка затратила 4 ч 40 мин, т. е. $4\frac{2}{3} = \frac{14}{3}$ ч.

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{45}{x+y} + \frac{15}{x-y} = \frac{14}{3}.$$

Рассмотрим второй рейс лодки. Он составил 45 км против течения от C до A и 30 км по течению от A до B. Значит,

$\frac{45}{x-y}$ ч — время движения лодки от C до A,

$\frac{30}{x+y}$ ч — время движения лодки от A до B.

Всего на второй рейс лодка затратила 7 ч. Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{45}{x-y} + \frac{30}{x+y} = 7.$$

Математическая модель задачи представляет собой систему двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{45}{x+y} + \dfrac{15}{x-y} = \dfrac{14}{3}, \\ \dfrac{45}{x-y} + \dfrac{30}{x+y} = 7. \end{cases}$$

Как решить эту систему, мы пока не знаем, придется вернуться к ней позднее (это будет сделано в § 7), но сначала надо создать необходимую теоретическую базу.

1. Рациональные уравнения с двумя переменными

<u>*Определение 1*</u>. **Рациональное уравнение с двумя переменными x, y** — это уравнение вида $h(x; y) = g(x; y)$, где $h(x; y)$, $g(x; y)$ — рациональные выражения, т. е. алгебраические выра-

жения, составленные из чисел и переменных x, y с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень.

Примеры рациональных уравнений с двумя переменными:

$$x^2 + y^2 = 58; \quad y - x = 4; \quad 2xy + x^3 = 0;$$

$$\frac{x}{x+y} - \frac{x^2}{x-y} = 2y - 1 \quad \text{и т. д.}$$

Конечно, можно рассматривать рациональные уравнения и с другими переменными, не обязательно с x и y; например, $a^3 - b^4 = 3ab$ — рациональное уравнение с двумя переменными a, b.

Рациональное уравнение $h(x; y) = q(x; y)$ всегда можно преобразовать к виду $p(x; y) = 0$, где $p(x; y)$ — рациональное выражение. Для этого достаточно переписать уравнение так: $h(x; y) - q(x; y) = 0$. Если $p(x; y)$ — многочлен, то $p(x; y) = 0$ называют *целым рациональным уравнением.*

Определение 2. **Решением уравнения $p(x; y) = 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому уравнению, т. е. обращает равенство с переменными $p(x; y) = 0$ в верное числовое равенство.

Например:

1) $(3; 7)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 58$. В самом деле, $3^2 + 7^2 = 58$ — верное числовое равенство.

2) $(\sqrt{22}; -6)$ — решение уравнения $x^2 + y^2 = 58$. Действительно, $(\sqrt{22})^2 + (-6)^2 = 58$ — верное числовое равенство $(22 + 36 = 58)$.

3) $(0; 5)$ — решение уравнения $2xy + x^3 = 0$, поскольку $2 \cdot 0 \cdot 5 + 0^3 = 0$ — верное числовое равенство.

4) $(1; 2)$ не является решением уравнения $2xy + x^3 = 0$. В самом деле, $2 \cdot 1 \cdot 2 + 1^3 = 0$ — неверное равенство (получается $5 = 0$).

Пример 2. Решить уравнение $(2x - 8)^2 + (y + 3)^4 = 0$.

Решение. При любых значениях x, y выполняются неравенства $(2x - 8)^2 \geqslant 0$, $(y + 3)^4 \geqslant 0$. Значит, левая часть заданного уравнения всегда неотрицательна, причем равенство ее нулю возможно лишь в одном случае: когда каждое из двух слагаемых обращается в нуль. Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений $\begin{cases}(2x-8)^2 = 0,\\ (y+3)^4 = 0,\end{cases}$

из которой получаем: $2x - 8 = 0$, т. е. $x = 4$; $y + 3 = 0$, т. е. $y = -3$.

Ответ: $(4; -3)$.

Пример 3. Найти все целочисленные решения уравнения $x - y = 10$.

Решение. Если $x = k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, то уравнение $x - y = 10$ принимает вид $k - y = 10$, откуда получаем: $y = k - 10$; это целое число. Значит, целочисленными решениями уравнения служат любые пары вида $(k; k - 10)$, где $k \in \boldsymbol{Z}$. ◼

Если дано целое рациональное уравнение с несколькими переменными и с целочисленными коэффициентами и если поставлена задача найти целочисленные (или, в более общем случае, рациональные) его решения, то говорят, что задано *диофантово уравнение* (в честь древнегреческого математика Диофанта; предположительно III в.). Диофантово уравнение называют также *неопределенным уравнением.* Неопределенность заключается, видимо, в том, что такое уравнение, как правило, имеет бесконечное множество решений, как это было выше в примере 3.

В большинстве случаев решение диофантовых уравнений сопряжено со значительными трудностями. Иногда они преодолеваются с помощью свойств делимости целых чисел.

Пример 4. Найти целочисленные решения уравнения $2x + 3y = 17$.

Решение. Пусть $(x; y)$ — решение уравнения. Тогда $17 - 3y = 2x$. Так как x — целое число, то число $17 - 3y$ четно. Рассмотрим отдельно случай, когда y четно, и случай, когда y нечетно.

1) Если y — четное число, то $3y$ четно, а $17 - 3y$ нечетно как разность нечетного числа 17 и четного числа $3y$. Значит, этот случай нам не подходит.

2) Если y — нечетное число, то $y = 2k + 1$, где k — целое число. Тогда $17 - 3y = 17 - 3(2k + 1) = 17 - 6k - 3 = 14 - 6k = 2(7 - 3k)$.

Так как по условию $17 - 3y = 2x$, то получаем $2(7 - 3k) = 2x$, $x = 7 - 3k$.

Итак, если $(x; y)$ — решение данного уравнения, то $x = 7 - 3k$, а $y = 2k + 1$, где k — целое число.

Проверим, что верно и обратное, т. е. если $x = 7 - 3k$, а $y = 2k + 1$, то $(x; y)$ — решение уравнения $2x + 3y = 17$.

Произведем подстановку:

$$2x + 3y = 2(7 - 3k) + 3(2k + 1) = 14 - 6k + 6k + 3 = 17.$$

Значит, любая пара вида $(7 - 3k; 2k + 1)$ является решением уравнения $2x + 3y = 17$.

Чтобы вам был понятнее полученный результат, дадим параметру k несколько конкретных целочисленных значений.

Пусть $k = 0$; тогда пара $(7 - 3k; 2k + 1)$ превращается в $(7; 1)$. Подставив значения $x = 7$, $y = 1$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим: $14 + 3 = 17$ — верное равенство.

Пусть $k = 1$; тогда пара $(7 - 3k; 2k + 1)$ превращается в $(4; 3)$. Подставив значения $x = 4$, $y = 3$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим: $8 + 9 = 17$ — верное равенство.

Пусть $k = 2$; тогда пара $(7 - 3k; 2k + 1)$ превращается в $(1; 5)$. Подставив значения $x = 1$, $y = 5$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим: $2 + 15 = 17$ — верное равенство.

Пусть $k = -1$; тогда пара $(7 - 3k; 2k + 1)$ превращается в $(10; -1)$. Подставив значения $x = 10$, $y = -1$ в уравнение $2x + 3y = 17$, получим: $20 - 3 = 17$ — верное равенство.

Для наглядности сведем полученные результаты в таблицу.

k	$x = 7 - 3k$	$y = 2k + 1$	$2x + 3y$
0	7	1	$2 \cdot 7 + 3 \cdot 1 = 14 + 3 = 17$
1	4	3	$2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 = 8 + 9 = 17$
2	1	5	$2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 2 + 15 = 17$
−1	10	−1	$2 \cdot 10 + 3 \cdot (-1) = 20 - 3 = 17$

Так же обстоит дело со всеми остальными целочисленными значениями параметра k.

О т в е т: $(7 - 3k; 2k + 1)$, где $k \in \mathbf{Z}$.

П р и м е р 5. Найти целочисленные решения уравнения $4x + 7y = 29$.

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение к виду $x = \dfrac{29 - 7y}{4}$ и далее: $x = \dfrac{28 + 1 - 7y}{4}$, т. е. $x = 7 - \dfrac{7y - 1}{4}$. Значение x будет целым тогда и только тогда, когда выражение $p(y) = 7y - 1$ делится без остатка на 4. Для целого числа y по отношению к числу 4 имеются 4 возможности: оно кратно числу 4, оно дает при делении на 4 остаток 1, оно дает при делении на 4 остаток 2, оно дает при делении на 4 остаток 3. Рассмотрим каждую из этих возможностей по отдельности.

1) $y = 4n$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7 \cdot 4n - 1 = 28n - 1$. Это число не делится на 4.

2) $y = 4n + 1$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 1) - 1 = 28n + 6$. Это число не делится на 4.

3) $y = 4n + 2$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 2) - 1 = 28n + 13$. Это число не делится на 4.

4) $y = 4n + 3$. Тогда $p(y) = 7y - 1 = 7(4n + 3) - 1 = 28n + 20$. Это число делится на 4.

Итак, $y = 4n + 3$. Тогда $x = 7 - \frac{7y - 1}{4} = 7 - \frac{28n + 20}{4} = 7 - (7n + 5) = 2 - 7n$.

О т в е т: $(2 - 7n;\ 4n + 3)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

П р и м е р 6. Найти целочисленные решения уравнения $4x^2 - y^2 = 11$.

Р е ш е н и е. <u>Первый способ.</u> Перепишем уравнение в виде $(2x - y)(2x + y) = 11$. Левая часть уравнения представляет собой произведение двух целых чисел. Оно может равняться 11 лишь в четырех случаях: когда первый множитель равен 1, а второй 11; когда первый множитель равен −1, а второй −11; когда первый множитель равен 11, а второй 1; когда первый множитель равен −11, а второй −1. Значит, задача сводится к решению четырех систем уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 2x + y = 11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -1, \\ 2x + y = -11; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = 11, \\ 2x + y = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - y = -11, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$$

Из первой системы находим: $x = 3$, $y = 5$; из второй: $x = -3$, $y = -5$; из третьей: $x = 3$, $y = -5$; из четвертой: $x = -3$, $y = 5$.

О т в е т: $(3; 5)$, $(-3; -5)$, $(3; -5)$, $(-3; 5)$.

Для уравнений с двумя переменными, как и для уравнений с одной переменной, можно ввести понятие равносильности.

<u>*Определение 3.*</u> Два уравнения $p(x; y) = 0$ и $q(x; y) = 0$ называют **равносильными**, если они имеют одинаковые решения (в частности, если оба уравнения не имеют решений).

Обычно при решении уравнения стараются заменить данное уравнение более простым, но равносильным ему. Такую замену называют **равносильным преобразованием уравнения**. Два основных равносильных преобразования указаны ниже.

1) *Перенос членов уравнения из одной части уравнения в другую с противоположными знаками.*

Например, замена уравнения $2x + 5y = 7x - 8y$ уравнением $2x - 7x = -8y - 5y$ есть равносильное преобразование уравнения.

2) *Умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же отличное от нуля число или выражение, всюду отличное от нуля.*

Например, замена уравнения $0{,}5x^2 - 0{,}3xy = 2y$ уравнением $5x^2 - 3xy = 20y$ (обе части уравнения умножили почленно на 10) есть равносильное преобразование уравнения.

Неравносильными преобразованиями уравнения, как и в случае уравнений с одной переменной, могут оказаться:

а) *освобождение от знаменателей, содержащих переменные;*

б) *возведение обеих частей уравнения в квадрат.*

Если в процессе решения уравнения применялось одно из указанных неравносильных преобразований, то все найденные решения надо проверить подстановкой в исходное уравнение, поскольку среди них могут оказаться посторонние решения, т. е. пары чисел, не удовлетворяющие исходному уравнению.

2. График уравнения с двумя переменными

Пусть дано уравнение $p(x;\ y) = 0$. Множество точек $(x;\ y)$ координатной плоскости xOy, таких, что $(x;\ y)$ — решение уравнения $p(x;\ y) = 0$, называют *графиком уравнения.*

П р и м е р 7. Построить график уравнения

$$3x + 4y - 12 = 0. \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Из курса алгебры 7-го класса вам известно, что графиком линейного уравнения с двумя переменными $ax + by + c = 0$, где хотя бы одно из чисел a, b отлично от нуля, является прямая линия. Значит, график уравнения (1) — прямая, для построения которой достаточно указать две точки, ей принадлежащие. Если в уравнение (1) подставить $x = 0$, то оно примет вид $4y - 12 = 0$, откуда находим: $y = 3$; итак, (0; 3) — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1). Если в уравнение (1)

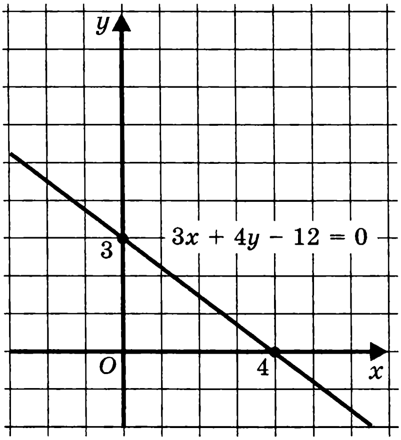


Рис. 52

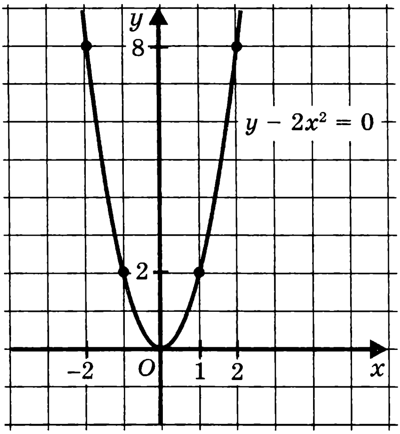


Рис. 53

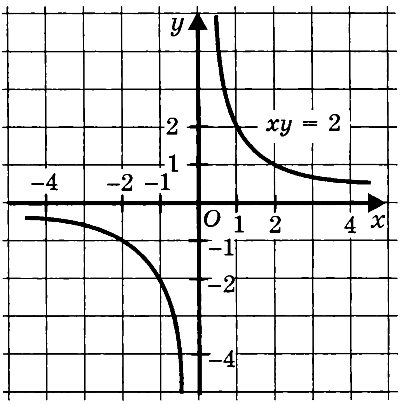


Рис. 54

подставить $y = 0$, то оно примет вид $3x - 12 = 0$, откуда находим: $x = 4$; итак, $(4; 0)$ — точка, координаты которой удовлетворяют уравнению (1).

Проведем через точки $(0; 3)$ и $(4; 0)$ прямую — это и будет график уравнения (1) (рис. 52).

Если уравнение $p(x; y) = 0$ удается преобразовать к виду $y = f(x)$, то график функции $y = f(x)$ считается одновременно и графиком уравнения $p(x; y) = 0$.

Пример 8. Построить график уравнения $y - 2x^2 = 0$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y = 2x^2$. Графиком функции $y = 2x^2$ является парабола (рис. 53). ◼

Пример 9. Построить график уравнения $xy = 2$.

Решение. Преобразуем уравнение к виду $y = \frac{2}{x}$. Графиком функции $y = \frac{2}{x}$ является гипербола (рис. 54). ◼

3. Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости. График уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Строя графики уравнений в примерах 7—9, мы опирались лишь на материал, известный вам из курса алгебры 7—8-го классов: графиками были прямая, парабола, гипербола. В этом пункте мы расширим круг геометрических фигур, которые могут служить графиками уравнений с двумя переменными.

Теорема 1

Расстояние между точками $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ координатной плоскости xOy вычисляется по формуле

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

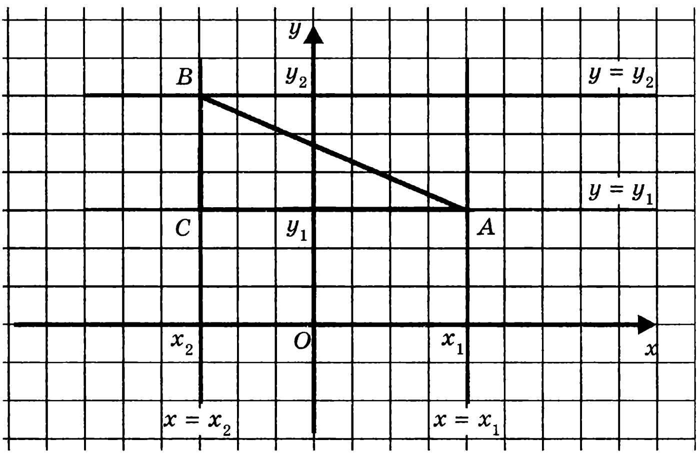


Рис. 55

Доказательство. Соединим точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ отрезком и проведем прямые $x = x_1$, $x = x_2$, $y = y_1$, $y = y_2$ (рис. 55). Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Длина катета AC равна расстоянию между точками x_1 и x_2 оси x, т. е. $AC = |x_2 - x_1|$. Длина катета BC равна расстоянию между точками y_1 и y_2 оси y, т. е. $BC = |y_2 - y_1|$. По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, т. е.

$$AB^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2. \qquad (2)$$

Так как $|a|^2 = a^2$, то формулу (2) можно переписать в виде

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Значит, $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Теорема доказана.

Вычислим, например, расстояние между точками (9; −1) и (2; −25). Получим: $\sqrt{(2-9)^2 + (-25+1)^2} = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{625} = 25$.

Теорема 2

Графиком уравнения

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \qquad (3)$$

является окружность на координатной плоскости xOy с центром в точке $O'(a; b)$ и радиусом r ($r > 0$) (рис. 56).

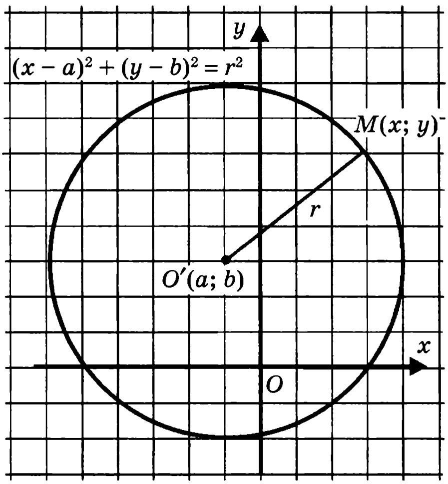


Рис. 56

Доказательство. Возьмем любую точку $M(x; y)$ окружности. По теореме 1 $O'M = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$. Но $O'M = r$, значит, $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, т. е.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Итак, координаты любой точки $M(x; y)$, принадлежащей окружности, удовлетворяют уравнению (3).

Если точка $P(x; y)$ не лежит на окружности, то либо $O'P < r$ (если точка P расположена внутри окружности), либо $O'P > r$ (если точка P расположена вне окружности). И в том и в другом случае уравнению (3) координаты точки P не удовлетворяют.

Следовательно, точки окружности и только они удовлетворяют уравнению (3). Теорема доказана.

Пример 10. Построить график уравнения $x^2 + y^2 = 16$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2$. По теореме 2 графиком этого уравнения является окружность с центром в точке $O(0; 0)$ и радиусом 4 (рис. 57). ◨

Пример 11. Построить график уравнения:

а) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 9$; б) $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

Решение. а) Перепишем уравнение в виде $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 3^2$. Графиком этого уравнения по теореме 2 является окружность с центром в точке (1; 2) и радиусом 3 (рис. 58).

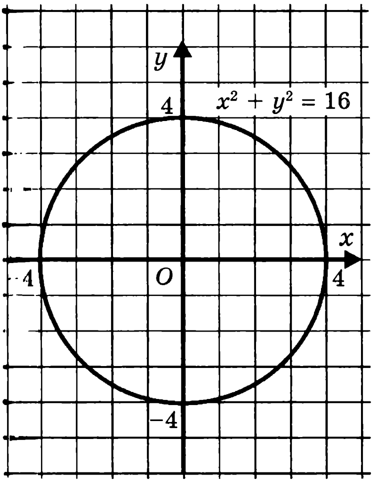


Рис. 57

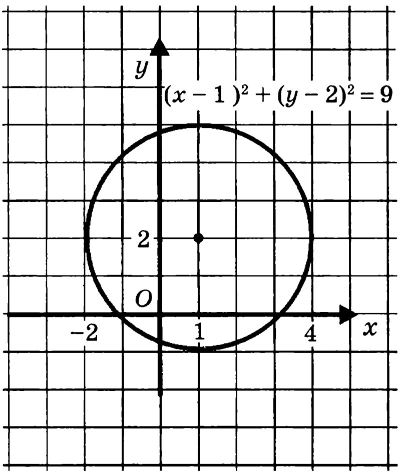


Рис. 58

б) Перепишем уравнение в виде $(x^2 + 4x + 4) + y^2 = 4$, т. е.

$$(x + 2)^2 + y^2 = 4,$$

и далее

$$(x - (-2))^2 + (y - 0)^2 = 2^2.$$

Графиком этого уравнения по теореме 2 является окружность с центром в точке $(-2; 0)$ и радиусом 2 (рис. 59). ◀■

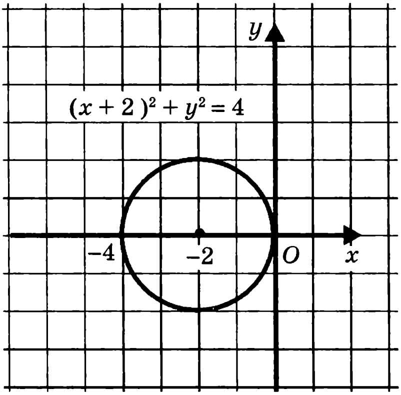
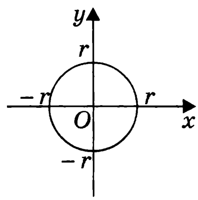
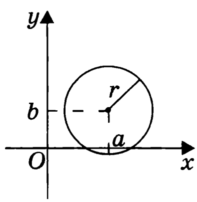


Рис. 59

Оформим основные результаты этого пункта в виде таблицы.

Аналитическая модель	**Геометрическая модель**	**Словесная модель**
$x^2 + y^2 = r^2$		Окружность на координатной плоскости с центром в начале координат и радиусом r
$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$		Окружность на координатной плоскости с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r

4. Системы уравнений с двумя переменными

Определение 4. Если поставлена задача найти все такие пары чисел $(x;\ y)$, которые одновременно удовлетворяют уравнению $p(x;\ y) = 0$ и уравнению $q(x;\ y) = 0$, то говорят, что указанные уравнения образуют **систему уравнений**:

$$\begin{cases} p(x;\ y) = 0, \\ q(x;\ y) = 0. \end{cases}$$

Пару чисел $(x;\ y)$, которая одновременно является решением и первого и второго уравнений системы, называют **решением системы уравнений.** *Решить систему уравнений* — это значит найти все ее решения или установить, что решений нет.

Например, пара $(3;\ 7)$ — решение системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58, \\ y - x = 4. \end{cases} \qquad (1)$$

В самом деле, эта пара удовлетворяет как первому, так и второму уравнению системы, значит, является ее решением. Обычно пишут так: $(3;\ 7)$ — решение системы, или $\begin{cases} x = 3, \\ y = 7 \end{cases}$ — решение системы.

А пара $(5;\ 9)$ не является решением системы (1): она не удовлетворяет первому уравнению (хотя и удовлетворяет второму уравнению системы).

Разумеется, переменные в уравнениях, образующих систему уравнений, могут быть обозначены и другими буквами, например латинскими a и b, s и t, u и v и т. д. Но в любом случае при записи ответа в виде пары чисел используют *лексикографический метод*, т. е. на первое место ставят ту из двух букв, которая в латинском алфавите встречается раньше.

Иногда удается решить систему уравнений *графическим методом*, который заключается в следующем: построить график первого уравнения, построить график второго уравнения и, наконец, найти точки пересечения графиков; координаты каждой точки пересечения служат решением системы уравнений.

Пример 12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ y - x = 4. \end{cases}$$

Решение. 1) Построим график уравнения $x^2 + y^2 = 16$ — окружность с центром в начале координат и радиусом 4 (рис. 60).

2) Построим график уравнения $y - x = 4$. Это прямая, проходящая через точки (0; 4) и (–4; 0) (рис. 60).

3) Окружность и прямая пересекаются в точках A и B (рис. 60). Судя по построенной геометрической модели, точка A имеет координаты (–4; 0), а точка B — координаты (0; 4). Проверка показывает, что на самом деле пары (–4; 0) и (0; 4) являются решениями обоих уравнений системы, а значит, и решениями системы уравнений. Следовательно, заданная система уравнений имеет два решения: (–4; 0) и (0; 4).

Ответ: (–4; 0); (0; 4).

Пример 13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x^2 - y = 0, \\ xy = 2. \end{cases}$$

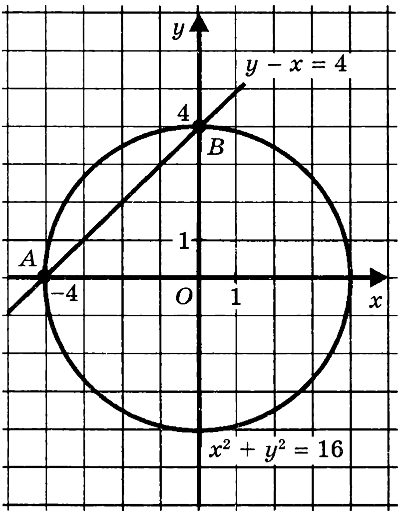


Рис. 60

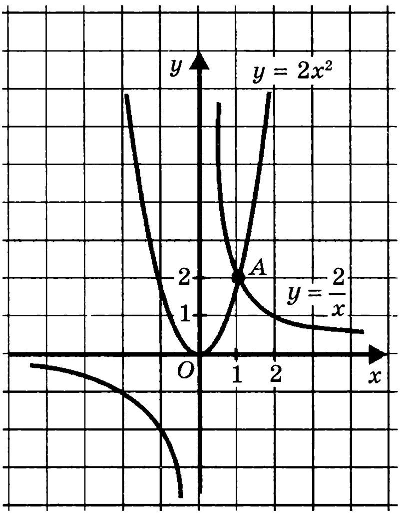


Рис. 61

Р е ш е н и е. 1) Переписав первое уравнение системы в виде $y = 2x^2$, приходим к выводу: графиком уравнения является парабола (рис. 61).

2) Переписав второе уравнение системы в виде $y = \frac{2}{x}$, приходим к выводу: графиком уравнения является гипербола (рис. 61).

3) Парабола и гипербола пересекаются в точке A (рис. 61). Точки пересечения только одна, поскольку правая ветвь параболы служит графиком возрастающей функции, а правая ветвь гиперболы — убывающей. Судя по построенной геометрической модели, точка A имеет координаты (1; 2). Проверка показывает, что, действительно, пара (1; 2) является решением обоих уравнений системы, а значит, и решением системы уравнений. Следовательно, заданная система уравнений имеет одно решение: (1; 2).

О т в е т: (1; 2).

Графический метод решения систем уравнений, как и графический метод решения уравнений, красив, но ненадежен. Во-первых, потому, что графики уравнений мы сумеем построить далеко не всегда. Во-вторых, даже если графики уравнений удалось построить, точки пересечения могут быть не такими «хорошими», как в специально подобранных примерах 11 и 12, а то и вовсе могут оказаться за пределами чертежа. Значит, нам нужно располагать надежными алгебраическими методами решения систем двух уравнений с двумя переменными. В частности, пример 13 можно было решить методом подстановки. Из первого уравнения находим, что $y = 2x^2$. Подставив $2x^2$ вместо y во второе уравнение системы, получим: $x \cdot 2x^2 = 2$; $2x^3 = 2$; $x^3 = 1$; $x = 1$. Если $x = 1$, то по формуле $y = 2x^2$ находим, что $y = 2$. Получаем: (1; 2) — решение системы.

Подробнее о методах решения систем уравнений поговорим в следующем параграфе.

5. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными

В этом пункте мы поговорим о решении неравенств вида $p(x; y) > 0$ ($p(x; y) < 0$), где $p(x; y)$ — алгебраическое выражение.

<u>*Определение 5.*</u> **Решением неравенства $p(x; y) > 0$** называют всякую пару чисел $(x; y)$, которая удовлетворяет этому

неравенству, т. е. обращает неравенство с переменными $p(x; y) > 0$ в верное числовое неравенство.

Например, пара (2; 1) является решением неравенства $2x + 3y > 0$ ($2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство), а пара (0; −1) не является решением этого неравенства (проверьте!).

Чтобы найти все решения неравенства с двумя переменными, чаще всего опираются на график уравнения $p(x; y) = 0$. Как рассуждают дальше, покажем на примерах.

Пример 14. Решить неравенство $2x + 3y > 0$.

Решение. Графиком уравнения $2x + 3y = 0$ является прямая, проходящая через начало координат (0; 0) и, например, точку (3; −2) (координаты обеих точек удовлетворяют уравнению $2x + 3y = 0$). Эта прямая изображена на рис. 62. Преобразуем заданное неравенство к виду $y > -\frac{2}{3}x$. Теперь ясно, что нас интересуют те точки координатной плоскости, которые находятся выше построенной прямой. Таким образом, все решения заданного неравенства геометрически изображаются точками полуплоскости, расположенной выше прямой $2x + 3y = 0$ (рис. 63). ◼

Практический совет. После того как был построен график уравнения, можно было рассуждать так: решения заданного неравенства изображаются точками полуплоскости, расположенной либо выше, либо ниже построенной прямой. Чтобы правильно

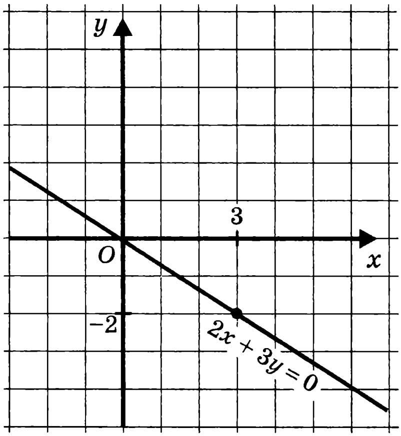


Рис. 62

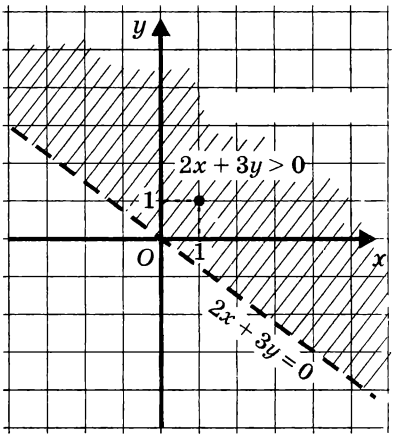


Рис. 63

выбрать нужную полуплоскость, возьмем любую точку одной из них и подставим координаты такой контрольной точки в заданное неравенство. Если получится верное числовое неравенство, то полуплоскость выбрана верно, если нет — то нет (здесь фактически используется утверждение, которое можно доказать лишь средствами высшей математики: если графиком рационального уравнения $p(x; y) = 0$ является линия L, то по одну и по другую сторону от L выражение $p(x; y)$ сохраняет постоянный знак).

Возьмем в качестве контрольной точку (1; 1) из верхней полуплоскости и подставим ее координаты в заданное неравенство. Получим: $2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 > 0$ — верное числовое неравенство. Значит, геометрической моделью решений заданного неравенства является полуплоскость, расположенная выше прямой $2x + 3y = 0$ (рис. 63). Понимать этот вывод следует так: координаты любой точки множества, заштрихованного на рис. 63, образуют пару чисел, служащую решением неравенства $2x + 3y > 0$.

П р и м е р 15. Решить неравенство $y - 2x^2 < 0$.

Р е ш е н и е. Графиком уравнения $y - 2x^2 = 0$ служит парабола $y = 2x^2$ (рис. 64). Она делит координатную плоскость на две части: одна расположена выше, а другая ниже параболы. Возьмем

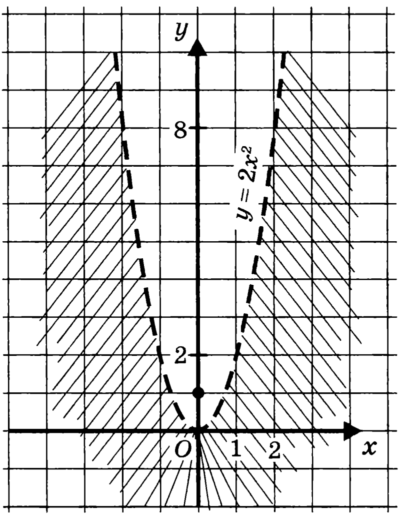


Рис. 64

в качестве контрольной точку (0; 1), расположенную выше параболы. Подставив координаты этой точки в заданное неравенство, получим: $1 - 2 \cdot 0^2 < 0$ — неверное числовое неравенство. Значит, в качестве геометрической модели решений заданного неравенства следует взять часть координатной плоскости, расположенную не выше, а ниже параболы (рис. 64). ◼

Определение 6. Если поставлена задача найти все такие пары чисел $(x; y)$, которые одновременно удовлетворяют неравенствам $p(x; y) > 0$ и $q(x; y) > 0$, то говорят, что указанные неравенства образуют **систему неравенств** $\begin{cases} p(x; y) > 0, \\ q(x; y) > 0. \end{cases}$

Пару чисел $(x; y)$, которая одновременно является решением и первого и второго неравенств системы, называют **решением системы неравенств. Решить систему неравенств** — значит найти все ее решения (или установить, что решений нет).

Пример 16. Решить систему неравенств $\begin{cases} 2x - 3y \leqslant 6, \\ x + y + 7 \geqslant 0. \end{cases}$

Решение. 1) Построим график уравнения $2x - 3y = 6$. Это прямая, проходящая через точки (3; 0) и (0; −2). Возьмем в качестве контрольной точку (0; 0), расположенную выше построенной прямой; ее координаты удовлетворяют неравенству $2x - 3y \leqslant 6$. Значит, геометрическим решением первого неравенства заданной системы служат полуплоскость, расположенная выше прямой, и сама прямая (поскольку заданное неравенство — нестрогое) (рис. 65).

2) Построим график уравнения $x + y + 7 = 0$. Это прямая, проходящая через точки (−7; 0) и (0; −7). Возьмем в качестве контрольной точку (0; 0), расположенную выше построенной прямой; ее координаты удовлетворяют неравенству $x + y + 7 \geqslant 0$. Значит, геометрическим решением второго неравенства заданной системы служат полуплоскость, расположенная выше прямой, и сама прямая (рис. 66).

3) В качестве решений заданной системы неравенств следует взять все общие точки построенных полуплоскостей, т. е. их пересечение (заштриховано на рис. 67). ◼

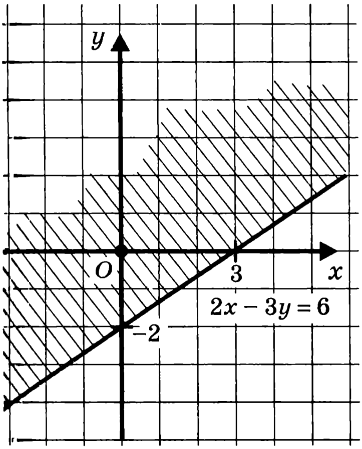


Рис. 65

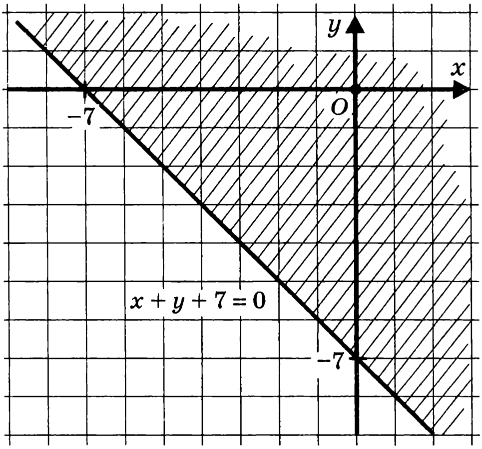


Рис. 66

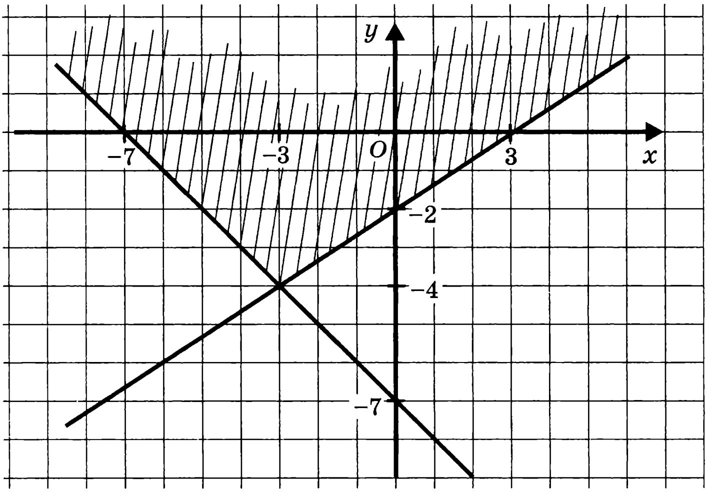


Рис. 67

§ 6. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В этом параграфе мы обсудим три метода решения систем уравнений, более надежные, чем графический метод, который рассмотрели в предыдущем параграфе.

1. Метод подстановки

Этот метод мы применяли в 7-м классе для решения систем линейных уравнений. Тот алгоритм, который был выработан в 7-м классе, вполне пригоден для решения систем любых двух уравнений (не обязательно линейных) с двумя переменными x и y (разумеется, переменные могут быть обозначены и другими буквами, что не имеет значения). Фактически этим алгоритмом мы воспользовались в предыдущем параграфе, когда завершали разговор о примере 12.

Алгоритм использования метода подстановки при решении системы двух уравнений с двумя переменными x, y

1. Выразить y через x из одного уравнения системы.
2. Подставить полученное выражение вместо y в другое уравнение системы.
3. Решить полученное уравнение относительно x.
4. Подставить каждый из найденных на третьем шаге корней уравнения поочередно вместо x в выражение y через x, полученное на первом шаге.
5. Записать ответ в виде пар значений (x; y), которые были найдены соответственно на третьем и четвертом шаге.

Переменные x и y, разумеется, равноправны, поэтому с таким же успехом мы можем на первом шаге алгоритма выразить не y через x, а x через y из одного уравнения. Обычно выбирают то уравнение, которое представляется более простым, и выражают ту переменную из него, для которой эта процедура представляется более простой.

П р и м е р 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x + 3y = 5, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. 1) Выразим x через y из первого уравнения системы: $x = 5 - 3y$.

2) Подставим полученное выражение вместо x во второе уравнение системы: $(5 - 3y)y = 2$.

3) Решим полученное уравнение:

$$5y - 3y^2 = 2;$$

$$3y^2 - 5y + 2 = 0;$$

$$y_1 = 1, \quad y_2 = \frac{2}{3}.$$

4) Подставим поочередно каждое из найденных значений y в формулу $x = 5 - 3y$. Если $y = 1$, то $x = 5 - 3 \cdot 1 = 2$; если $y = \frac{2}{3}$, то $x = 5 - 3 \cdot \frac{2}{3} = 3$.

5) Пары $(2; 1)$ и $(3; \frac{2}{3})$ — решения заданной системы уравнений.

О т в е т: $(2; 1)$; $(3; \frac{2}{3})$.

2. Метод алгебраического сложения

Этот метод, как и метод подстановки, знаком вам из курса алгебры 7-го класса, где он применялся для решения систем линейных уравнений. Суть метода напомним на следующем примере.

П р и м е р 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Умножим все члены первого уравнения системы на 3, а второе уравнение оставим без изменения:

$$\begin{cases} 6x + 3xy + 6 = 0, \\ 4y + 3xy + 30 = 0. \end{cases}$$

Вычтем второе уравнение системы из ее первого уравнения:

$$(6x + 3xy + 6) - (4y + 3xy + 30) = 0 - 0;$$

$$6x - 4y - 24 = 0;$$

$$3x - 2y - 12 = 0.$$

В результате алгебраического сложения двух уравнений исходной системы получилось уравнение более простое, чем первое и второе уравнения заданной системы. Этим более простым уравнением заменим любое уравнение заданной системы, например второе. Тогда заданная система уравнений заменится более простой системой:

$$\begin{cases} 2x + xy + 2 = 0, \\ 3x - 2y - 12 = 0. \end{cases}$$

Эту систему можно решить методом подстановки. Из второго уравнения находим: $y = \frac{3x - 12}{2}$. Подставив это выражение вместо y в первое уравнение системы, получим:

$$2x + x \cdot \frac{3x - 12}{2} + 2 = 0;$$

$$4x + 3x^2 - 12x + 4 = 0;$$

$$3x^2 - 8x + 4 = 0;$$

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Осталось подставить найденные значения x в формулу $y = \frac{3x - 12}{2}$. Если $x = 2$, то $y = \frac{3 \cdot 2 - 12}{2} = -3$; если $x = \frac{2}{3}$, то

$$y = \frac{3 \cdot \frac{2}{3} - 12}{2} = -5.$$

Таким образом, мы нашли два решения системы: $(2; -3)$ и $\left(\frac{2}{3}; -5\right)$.

Ответ: $(2; -3)$; $\left(\frac{2}{3}; -5\right)$.

3. Метод введения новых переменных

С методом введения новой переменной при решении уравнений с одной переменной вы познакомились в курсе алгебры 8-го класса. Суть этого метода при решении систем уравнений та же самая, но с технической точки зрения имеются некоторые особенности, которые мы и обсудим в примерах 3 и 4.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 2,5, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Решение. Введем новую переменную $t = \frac{x}{y}$. Тогда первое уравнение системы можно будет переписать в более простом виде: $t + \frac{1}{t} = 2,5.$ Решим это уравнение относительно переменной t:

$$t^{\backslash 2t} + \frac{1^{\backslash 2}}{t} - \frac{5^{\backslash t}}{2} = 0;$$

$$\frac{2t^2 + 2 - 5t}{2t} = 0;$$

$$2t^2 - 5t + 2 = 0;$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Оба этих значения удовлетворяют условию $2t \neq 0$, а потому являются корнями рассматриваемого уравнения с переменной t.

Но $t = \frac{x}{y}$, значит, либо $\frac{x}{y} = 2$, откуда находим, что $x = 2y$, либо $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$, откуда находим, что $y = 2x$.

Таким образом, с помощью метода введения новой переменной нам удалось как бы расслоить первое уравнение системы на два более простых уравнения:

$$x = 2y; \quad y = 2x.$$

Что же дальше? А дальше каждое из двух полученных простых уравнений нужно поочередно рассмотреть в системе с уравнением $x^2 - y^2 = 3$, о котором мы пока не вспоминали. Иными словами, задача сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3; \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Надо найти решения первой системы, решения второй системы и все полученные пары включить в ответ.

Решим первую систему уравнений:

$$\begin{cases} x = 2y, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Воспользуемся методом подстановки, тем более что здесь для него все готово: подставим выражение $2y$ вместо x во второе уравнение системы. Получим последовательно:

$$(2y)^2 - y^2 = 3;$$
$$4y^2 - y^2 = 3;$$
$$3y^2 = 3;$$
$$y^2 = 1;$$
$$y_1 = 1, \quad y_2 = -1.$$

Так как $x = 2y$, то находим соответственно: $x_1 = 2$, $x_2 = -2$. Тем самым получены два решения заданной системы: (2; 1) и (–2; –1).

Решим вторую систему уравнений:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 - y^2 = 3. \end{cases}$$

Снова воспользуемся методом подстановки: подставим выражение $2x$ вместо y во второе уравнение системы. Получим последовательно:

$$x^2 - (2x)^2 = 3;$$
$$x^2 - 4x^2 = 3;$$
$$-3x^2 = 3;$$
$$x^2 = -1.$$

Это уравнение не имеет корней, значит, и система уравнений не имеет решений. Таким образом, в ответ надо включить только решения первой системы.

О т в е т: (2; 1); (–2; –1).

Метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными применяется в двух вариантах. *Первый вариант*: вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы. Именно так обстояло дело в примере 3. *Второй вариант*: вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы. Так будет обстоять дело в примере 4.

Пример 4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} + \dfrac{3}{2x+y} = 2, \\ \dfrac{8}{x-3y} - \dfrac{9}{2x+y} = 1. \end{cases}$$

Решение. Введем две новые переменные: $a = \dfrac{2}{x-3y}$, $b = \dfrac{3}{2x+y}$. Учтем, что тогда $\dfrac{8}{x-3y} = 4a$, $\dfrac{9}{x-3y} = 3b$.

Это позволит переписать заданную систему в значительно более простом виде, но относительно новых переменных a и b:

$$\begin{cases} a + b = 2, \\ 4a - 3b = 1. \end{cases}$$

Применим для решения этой системы метод алгебраического сложения:

$$+\begin{cases} 3a + 3b = 6, \\ 4a - 3b = 1; \end{cases}$$
$$7a = 7;$$
$$a = 1.$$

Так как $a = 1$, то из уравнения $a + b = 2$ находим: $1 + b = 2$; $b = 1$. Таким образом, относительно переменных a и b мы получили одно решение:

$$\begin{cases} a = 1, \\ b = 1. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным x и y, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x-3y} = 1, \\ \dfrac{3}{2x+y} = 1, \end{cases}$$

т. е.

$$\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

Применим для решения этой системы метод алгебраического сложения:

$$+\begin{cases} x - 3y = 2, \\ 6x + 3y = 9; \end{cases}$$
$$7x = 11;$$
$$x = \frac{11}{7}.$$

Так как $x = \frac{11}{7}$, то из уравнения $2x + y = 3$ находим: $y = 3 - 2x = 3 - 2 \cdot \frac{11}{7} = 3 - \frac{22}{7} = -\frac{1}{7}$. Таким образом, относительно переменных x и y мы получили одно решение:

$$\begin{cases} x = \frac{11}{7}, \\ y = -\frac{1}{7}. \end{cases}$$

О т в е т: $\left(1\frac{4}{7}; -\frac{1}{7}\right)$.

Завершим этот параграф кратким, но достаточно серьезным теоретическим разговором. Вы уже накопили некоторый опыт в решении различных уравнений: линейных, квадратных, рациональных, иррациональных. Вы знаете, что основная идея решения уравнения состоит в постепенном переходе от одного уравнения к другому, более простому, но равносильному заданному. В предыдущем параграфе мы ввели понятие равносильности для уравнений с двумя переменными. Используют это понятие и для систем уравнений.

Определение. Две системы уравнений с переменными x и y называют **равносильными**, если они имеют одни и те же решения или если обе системы не имеют решений.

Все три метода (подстановки, алгебраического сложения и введения новых переменных), которые мы обсудили в этом параграфе, корректны с точки зрения равносильности. Иными словами, *используя эти методы, мы заменяем одну систему уравнений другой, более простой, но равносильной первоначальной системе.*

§ 7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КАК МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ СИТУАЦИЙ

Вам известно, что система двух уравнений с двумя переменными может служить математической моделью реальной ситуации. Первый опыт в решении таких задач вы приобрели в курсе алгебры 7-го класса. Правда, там встречались только системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Теперь мы умеем решать более сложные системы уравнений, значит, нам вполне по силам и решение более сложных задач.

Пример 1. В райцентре два кинотеатра — «Факел» и «Слава», первый — на 400, а второй — на 600 мест. В зрительном зале кинотеатра «Слава» на 4 ряда больше, чем в кинотеатре «Факел», и, кроме того, в каждом ряду на 5 мест больше, чем в кинотеатре «Факел». Сколько рядов в зрительном зале кинотеатра «Факел», если известно, что в каждом ряду кинотеатра «Слава» более 25 мест?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Пусть x — число рядов в кинотеатре «Факел»,
y — число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел».
Тогда $x + 4$ — число рядов в кинотеатре «Слава»,
$y + 5$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава».
Зная число рядов и число мест в ряду, можно найти общее число мест в каждом кинотеатре:

xy — число мест в кинотеатре «Факел»,
$(x + 4)(y + 5)$ — число мест в кинотеатре «Слава».

По условию в кинотеатре «Факел» 400 мест, т. е. $xy = 400$, а в кинотеатре «Слава» 600 мест, т. е. $(x + 4)(y + 5) = 600$.

Таким образом, мы приходим к системе двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ (x+4)(y+5) = 600, \end{cases} \qquad (1)$$

где x, y — натуральные числа.

Математическая модель задачи составлена.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*
Имеем:

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x + 20 = 600; \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy = 400, \\ xy + 4y + 5x = 580. \end{cases} \qquad (2)$$

Применим метод алгебраического сложения: вычтем первое уравнение из второго. Получим:

$$(xy + 4y + 5x) - xy = 580 - 400;$$
$$4y + 5x = 180.$$

Заменим этим уравнением второе уравнение системы (2):

$$\begin{cases} xy = 400, \\ 4y + 5x = 180. \end{cases} \qquad (3)$$

Система (3) несколько проще, чем система (2), ее можно решить методом подстановки. Выразим y через x из второго уравнения системы (3): $y = \frac{180 - 5x}{4}$. Подставим это выражение вместо y в первое уравнение системы (3):

$$x \cdot \frac{180 - 5x}{4} = 400;$$
$$x(180 - 5x) = 1600;$$
$$5x^2 - 180x + 1600 = 0;$$
$$x^2 - 36x + 320 = 0$$

(обе части предыдущего уравнения почленно разделили на 5);

$$x_1 = 20, \quad x_2 = 16.$$

Так как $y = \frac{180 - 5x}{4}$, то получаем: если $x = 20$, то $y = 20$; если $x = 16$, то $y = 25$.

Итак, система (3), а значит, и равносильная ей система (1) имеют два решения: (20; 20) и (16; 25).

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Опираясь на полученные решения системы, мы должны проанализировать две возможности: либо в кинотеатре «Факел» 20 рядов по 20 мест в каждом ряду, либо 16 рядов по 25 мест в каждом ряду. Если выбрать первую возможность, то в кинотеатре «Слава» будет 24 ряда (по условию там на 4 ряда больше) по 25 мест в каждом ряду (по условию в каждом ряду «Славы» на 5 мест больше, чем в «Факеле»). Это нас не устраивает, поскольку по условию в каждом ряду «Славы» более 25 мест. Рассмотрим вторую возможность: в «Факеле» 16 рядов по 25 мест в каждом. Тогда в «Славе» будет 20 рядов по 30 мест в каждом. Это нас устраивает.

Итак, из двух решений системы выбираем одно: $x = 16$, $y = 25$, а это означает, что в кинотеатре «Факел» 16 рядов.

Ответ: 16 рядов.

На самом деле эта задача не является для вас новой, мы решали ее в учебнике «Алгебра–8», но по-другому: математической моделью задачи было рациональное уравнение с одной переменной. Приведем краткие наброски для составления такой модели:

x — число рядов в кинотеатре «Факел»,

$\frac{400}{x}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Факел»,

$x + 4$ — число рядов в кинотеатре «Слава»,

$\frac{600}{x+4}$ — число мест в каждом ряду кинотеатра «Слава».

Получаем уравнение $\frac{600}{x+4} - \frac{400}{x} = 5$. Это математическая модель задачи.

Сравним два варианта решения задачи. В первом варианте была более сложная математическая модель (система уравнений), значит, более трудным был второй этап — работа с составленной моделью. Зато менее трудным был первый этап, сама математическая модель была составлена легче и быстрее. В принципе выгоднее упрощать работу на первом этапе — на этапе составления математической модели задачи. Поэтому во многих случаях целесообразнее работать не с одной, а с двумя переменными.

Пример 2. Пристани B и C находятся ниже пристани A по течению реки на 30 км и 45 км соответственно (см. рис. 51 на с. 49).

Моторная лодка отходит от пристани A, доходит до C, сразу поворачивает назад и приходит в B, затратив на весь путь 4 ч 40 мин. В другой раз эта же лодка отошла от пристани C, дошла до A, сразу повернула назад и пришла в B, затратив на весь путь 7 ч. Чему равны собственная скорость лодки и скорость течения реки?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.* Это уже сделано выше (см. пример 1 в § 5):

$$\begin{cases} \dfrac{45}{x+y} + \dfrac{15}{x-y} = \dfrac{14}{3}, \\ \dfrac{45}{x-y} + \dfrac{30}{x+y} = 7. \end{cases}$$

Здесь x км/ч — собственная скорость лодки, y км/ч — скорость течения реки.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Для решения системы уравнений воспользуемся методом введения новых переменных. Пусть $\dfrac{15}{x+y} = a$, $\dfrac{15}{x-y} = b$.

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 3a + b = \dfrac{14}{3}, \\ 2a + 3b = 7. \end{cases}$$

Решив эту систему двух линейных уравнений с двумя переменными a и b (сделайте это!), получим: $a = 1$, $b = \dfrac{5}{3}$.

Итак,

$$\frac{15}{x+y} = 1, \text{ т. е. } x + y = 15;$$

$$\frac{15}{x-y} = \frac{5}{3}, \text{ т. е. } x - y = 9.$$

Остается решить совсем простую систему уравнений

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 9. \end{cases}$$

Получаем: $x = 12$, $y = 3$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Требуется определить скорость лодки в стоячей воде и скорость течения реки. Первую скорость мы обозначили буквой x, получили $x = 12$; значит, собственная скорость лодки составляет 12 км/ч. Скорость течения мы обозначили буквой y, получили $y = 3$. Значит, скорость течения реки составляет 3 км/ч.

Ответ: 12 км/ч; 3 км/ч.

Пример 3. Мастер и его ученик планировали сообща выполнить некоторую работу за 6 дней. Сначала за дело взялся ученик, но, выполнив 20 % задания, он заболел. Остальная работа пришлась на долю мастера. В итоге выполнение задания растянулось на 11 дней. За сколько дней мог бы выполнить все задание мастер и за сколько дней ученик, действуя в одиночку, если известно, что количество дней выражается целым числом?

Решение. Первый этап. *Составление математической модели.*

Если речь идет о выполнении некоторой работы, не охарактеризованной в количественном плане (т. е. не сказано, сколько деталей надо сделать, сколько кубометров земли вынуть и т. д.), то объем работы считают равным 1, а части работы выражают в долях единицы.

Пусть x — число дней, необходимых мастеру, чтобы выполнить в одиночку всю работу, а y — число дней, необходимых ученику, чтобы справиться в одиночку со всей работой. Если объем всей работы (т. е. 1) разделим на число дней, необходимых для выполнения всей работы, то узнаем долю работы, выполняемую за 1 день. Итак,

$\frac{1}{x}$ — доля работы, которую выполняет мастер за 1 день,

$\frac{1}{y}$ —доля работы, которую выполняет ученик за 1 день.

По условию, работая вместе, мастер и ученик могли бы выполнить все задание за 6 дней. Доля работы мастера за 6 дней выражается формулой $\frac{1}{x} \cdot 6$, т. е. $\frac{6}{x}$. Доля работы ученика за 6 дней выражается формулой $\frac{1}{y} \cdot 6$, т. е. $\frac{6}{y}$.

Поскольку вместе они выполнят всю работу (т. е. 1), составляем уравнение:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{y} = 1.$$

По условию ученик выполнил, трудясь в одиночку до своей болезни, 20 % задания, т. е. $\frac{1}{5}$ часть всей работы. Сколько времени он потратил? Естественно, что $\frac{1}{5}$ часть того времени, которое нужно ему на выполнение всей работы, т. е. $\frac{1}{5} \cdot y$ дней. Потом пришел мастер, сделал оставшуюся работу, т. е. $\frac{4}{5}$ задания, на что затратил $\frac{4}{5} \cdot x$ дней.

По условию выполнение задания растянулось на 11 дней, т. е.

$$\frac{y}{5} + \frac{4x}{5} = 11;$$

$$y + 4x = 55.$$

Таким образом, математическая модель задачи составлена — система двух уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{6}{y} = 1, \\ y + 4x = 55, \end{cases}$$

где x, y — целые числа.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся методом подстановки. Выразим y через x из второго уравнения системы: $y = 55 - 4x$. Подставим выражение $55 - 4x$ вместо y в первое уравнение системы:

$$\frac{6}{x} + \frac{6}{55 - 4x} = 1. \qquad (4)$$

Решая это рациональное уравнение, последовательно получаем:

$$\frac{6^{|55-4x}}{x} + \frac{6^{|x}}{55 - 4x} - 1^{|x(55-4x)} = 0;$$

$$\frac{6(55-4x)+6x-x(55-4x)}{x(55-4x)}=0;$$

$$4x^2-73x+330=0;$$

$$x_1=10,\quad x_2=\frac{33}{4}.$$

Оба найденных значения удовлетворяют условию $x(55-4x)\neq 0$, т. е. являются корнями уравнения (4).

Осталось найти соответствующие значения y. Для этого воспользуемся соотношением $y=55-4x$. Если $x=10$, то $y=15$; если $x=\frac{33}{4}$, то $y=22$.

Итак, составленная система уравнений имеет два решения:

$$(10;\ 15)\text{ и }\left(\frac{33}{4};\ 22\right).$$

По условию количество дней, необходимых как мастеру, так и ученику для выполнения в одиночку всего задания, выражается целым числом. Значит, пара $\left(\frac{33}{4};\ 22\right)$ нас не устраивает.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Он уже получен: $x=10$, $y=15$.

О т в е т: 10 дней; 15 дней.

Замечание. Обратите внимание на то, что, решая системы уравнений, составленные в рассмотренных задачах, мы применили все методы, о которых шла речь в предыдущем параграфе: и подстановку, и алгебраическое сложение, и введение новых переменных.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- В этой главе вы познакомились с новой математической моделью, которая часто служит описанием математической сущности реальных процессов, — системой двух уравнений с двумя переменными.

- Вы познакомились с новыми математическими понятиями:
уравнение (неравенство) с двумя переменными;
решение уравнения (неравенства) с двумя переменными;
система двух уравнений (неравенств) с двумя переменными;
решение системы двух уравнений с двумя переменными;
равносильность уравнений с двумя переменными, равносильность систем уравнений.

- Мы обсудили различные методы решения систем двух уравнений с двумя переменными:
графический метод;
метод подстановки;
метод алгебраического сложения;
метод введения новых переменных.

- Мы обратили внимание на то, что метод введения новых переменных при решении систем двух уравнений с двумя переменными применяется в двух вариантах. Первый вариант: вводится одна новая переменная и используется только в одном уравнении системы. Второй вариант: вводятся две новые переменные и используются одновременно в обоих уравнениях системы.

- Мы доказали, что $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ — уравнение окружности, построенной на координатной плоскости xOy, с центром в точке $(a; b)$ и радиусом r. В частности, $x^2 + y^2 = r^2$ — уравнение окружности, построенной на координатной плоскости xOy, с центром в начале координат и радиусом r.

ГЛАВА 3

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ

§ 8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛОВОЙ ФУНКЦИИ. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ

За два года изучения школьного курса алгебры вы уже привыкли к тому, что термин «функция» используется практически постоянно. Это и понятно: ведь математика изучает математические модели, а большинство этих моделей так или иначе связано с функциями. Но в математике действует закон: если используется какой-то термин, его надо точно определить. За два года изучения курса алгебры мы с вами накопили достаточно много примеров, подтверждающих этот закон. Так, в 7-м классе мы ввели термин «степень с натуральным показателем», точно его определив: «под a^n, где $n = 2, 3, 4, \ldots$, понимается произведение n множителей, каждый из которых равен a; под a^1 понимается само число a». В 8-м классе мы ввели термин «квадратный корень из неотрицательного числа», дав ему точное определение: «$\sqrt{a}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен a». И так далее и тому подобное — вы сами можете привести аналогичные примеры.

В то же время были случаи, когда мы вводили термин и начинали им пользоваться, но точного определения не формулировали, ограничиваясь приблизительным истолкованием термина. Так было, в частности, с термином «функция». Почему же мы в 7-м классе, как только стали использовать понятие функции, не сформулировали точное определение, почему не сделали этого и в 8-м классе?

Дело в том, что история развития математики показывает: были понятия, которые человечество активно и длительное время использовало как рабочий инструмент, не задумываясь о том, как их определить. Лишь накопив необходимый *опыт* в работе с тем или иным понятием, математики начинали ощущать *потребность* в его формальном определении. Разумеется, не всегда первые попытки определить то или иное понятие, вроде бы ясное на интуитивном уровне, оказывались удачными, его приходилось впоследствии дополнять, уточнять. Так было и с понятием функции.

Проанализируем наш опыт работы с термином «функция». В 7-м классе мы ввели термин «линейная функция», понимая под этим уравнение с двумя переменными специального вида $y = kx + m$ и рассматривая переменные x и y как неравноправные: x — независимая переменная, y — зависимая переменная. Затем задались вопросом: а не встречаются ли при описании реальных процессов математические модели подобного вида, но такие, у которых y выражается через x не по формуле $y = kx + m$, а по какой-либо иной формуле? Ответ на этот вопрос был получен сразу: встречаются. В 7-м классе, кроме упомянутой линейной функции, мы изучили функции $y = x^2$ и $y = -x^2$, а в 8-м классе — функции $y = kx^2$, $y = \frac{k}{x}$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = \sqrt{x}$, $y = |x|$.

Постепенно мы начали осознавать, что, изучая какой-либо реальный процесс, обычно обращают внимание на две переменные величины, участвующие в нем (в более сложных процессах участвуют более двух величин, но мы такие процессы пока не рассматривали). Одна из них меняется как бы сама по себе, независимо ни от чего (такую переменную чаще всего обозначают буквой x), а другая переменная принимает значения, каждое из которых каким-то образом зависит от выбранного значения переменной x (такую зависимую переменную чаще всего обозначают буквой y). Математической моделью реального процесса во многих случаях

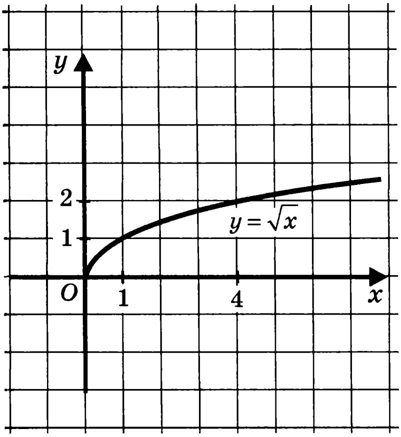


Рис. 68

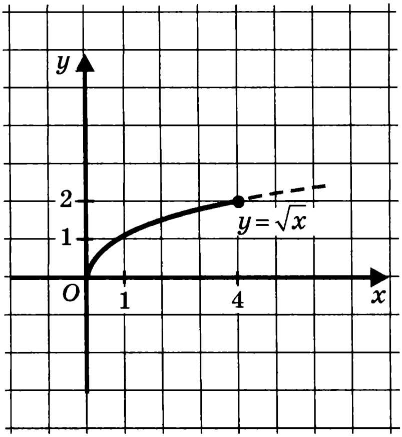


Рис. 69

как раз и является запись на математическом языке зависимости y от x: $y = f(x)$. Такие математические модели мы называли функциями.

Математическая модель $y = f(x)$ обычно дополняется указанием на то, из какого числового множества берутся значения независимой переменной x. Например, мы говорили о функции $y = \sqrt{x}$, подразумевая, что $x \geqslant 0$ (график функции изображен на рис. 68), но мы рассматривали и функцию $y = \sqrt{x}$, где $x \in [0; 4]$ (график функции изображен на рис. 69). Это разные функции.

Использование математической модели вида $y = f(x)$ оказывается удобным во многих случаях, в частности тогда, когда реальный процесс описывается различными формулами на разных промежутках изменения независимой переменной. Вот одна из таких функций: $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leqslant 0; \\ 2x, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

График функции изображен на рис. 70. Помните, как строить такие графики? Сначала надо построить параболу $y = x^2$ и взять ее часть при $x \leqslant 0$ (левая ветвь параболы), затем построить прямую $y = 2x$ и взять ее часть при $x > 0$. И наконец, надо обе выделенные части объединить на одном рисунке, т. е. построить в одной

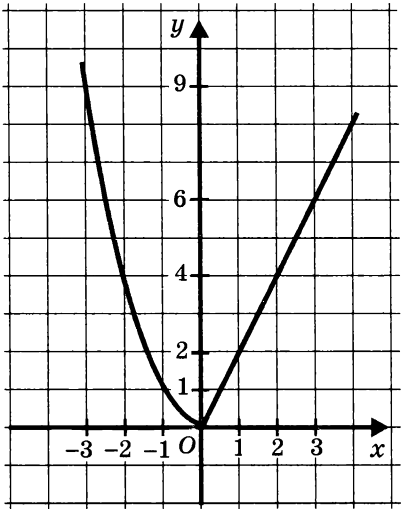


Рис. 70

координатной плоскости. Такие кусочные функции мы рассматривали и в 7-м, и в 8-м классах.

Так что же такое функция? Проведенный выше анализ и наш опыт изучения конкретных функций в 7-м и 8-м классах позволяют выделить два существенных момента.

1. Запись $y = f(x)$ указывает на п р а в и л о (обычно говорят «правило f»), с помощью которого, зная конкретное значение независимой переменной x, можно найти соответствующее значение переменной y.

2. Указывается числовое множество X (чаще всего какой-то числовой промежуток), откуда берутся значения независимой переменной x.

Теперь мы можем сформулировать одно из главных определений школьного курса алгебры (да пожалуй, и всей математики).

Определение 1. Если даны числовое множество X и правило f, позволяющее поставить в соответствие каждому элементу x из множества X определенное число y, то говорят, что задана **функция** $y = f(x)$ **с областью определения** X; пишут: $y = f(x)$, $x \in X$. При этом переменную x называют **независимой переменной** или **аргументом**, а переменную y — **зависимой переменной**.

Замечание. В реальной жизни иногда говорят: «Каковы мои функции?» или «Каковы мои функциональные обязанности?», спрашивая тем самым: «каков круг моих действий, моих обязанностей» или «что я должен делать, как действовать». В реальной жизни слово «функция» означает «действие» или «правила действий». Обратите внимание, что фактически тот же смысл имеет и математический термин «функция», который введен выше в определении 1.

Для области определения функции $y = f(x)$, $x \in X$ принято использовать обозначение $D(f)$ (от лат. *domain* — область). Например:

для функции $y = \sqrt{x}$, $x \geqslant 0$ (рис. 68) имеем: $D(f) = [0; +\infty)$;

для функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ (рис. 69) имеем: $D(f) = [0; 4]$;

для функции $y = f(x)$ (рис. 70) имеем: $D(f) = (-\infty; +\infty)$.

Если $f(x)$ — алгебраическое выражение и множество X совпадает с областью определения этого выражения, то действует соглашение: вместо записи $y = f(x)$, $x \in X$ используется более короткая запись $y = f(x)$, хотя, подчеркнем, такая запись не совсем соответствует определению 1. Но математики стараются быть экономными во всем: и в употреблении слов в формулировках, и в записях математических утверждений.

Еще раз подчеркнем, что нельзя говорить о функции $y = f(x)$ без указания ее области определения, которая или задается явно, или подразумевается — в случае, если область определения функции $y = f(x)$ совпадает с областью определения выражения $f(x)$ (такую область определения иногда называют *естественной*).

Пример 1. Найти область определения функции:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$; б) $y = \dfrac{1}{x^2 - 6x + 8}$; в) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}}$.

Решение. а) Так как область определения функции явно не указана, подразумевается, что она совпадает с областью определения выражения $\sqrt{x^2 - 6x + 8}$. Таким образом, речь идет о поиске *естественной области определения функции* (то же имеет место в заданиях б) и в)).

Выражение $\sqrt{h(x)}$ имеет смысл лишь при $h(x) \geqslant 0$. Значит, задача сводится к решению квадратного неравенства $x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$.

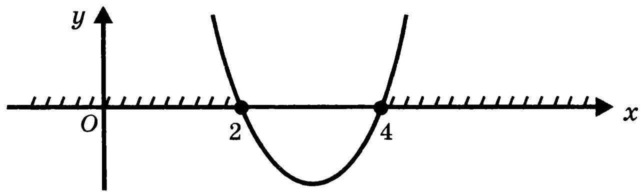


Рис. 71

Найдя корни квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 8$ ($x_1 = 2$; $x_2 = 4$) и схематически построив параболу $y = x^2 - 6x + 8$ (рис. 71), выбираем интересующие нас промежутки: $x \leqslant 2$; $x \geqslant 4$.

Итак, $D(f) = (-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$ (напомним, что $\cup$ — знак объединения множеств, см. § 3).

б) Функция $y = \dfrac{1}{(x-2)(x-4)}$ определена в любой точке x, за исключением точек 2 и 4 — при этих значениях x знаменатель дроби обращается в 0. Ответ можно записать так:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (2; 4) \cup (4; +\infty).$$

Впрочем, на практике можно использовать сокращенную запись:

$$D(f)\colon x \neq 2;\ x \neq 4.$$

в) Здесь задача сводится к решению неравенства

$$x^2 - 6x + 8 > 0.$$

Воспользовавшись геометрической моделью, представленной на рис. 71, но исключив из рассмотрения точки $x = 2$ и $x = 4$, получим:

$$D(f) = (-\infty; 2) \cup (4; +\infty).$$

<u>*Определение 2.*</u> Множество всех значений функции $y = f(x)$, $x \in X$ называют **областью значений функции** и обозначают $E(f)$ (от лат. *equal* — равно).

<u>*Определение 3.*</u> **Графиком функции** $y = f(x)$, $x \in X$ называют множество F точек $(x; y)$ координатной плоскости xOy:

$$F = \{(x; y) \mid x \in X,\ y = f(x)\}.$$

Если известен график функции, то область значений функции найти сравнительно нетрудно. Для этого достаточно спроецировать график на ось ординат. То числовое множество, геометрическая модель которого получится на оси ординат в результате указанного проецирования, и будет представлять собой $E(f)$. Например:

для функции $y = \sqrt{x}$ имеем: $E(f) = [0; +\infty)$ (рис. 68);

для функции $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$ имеем: $E(f) = [0; 2]$ (рис. 69);

для функции $y = f(x)$ (рис. 70) имеем: $E(f) = [0; +\infty)$.

Пример 2. Дана функция $y = f(x)$, где

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leqslant 0; \\ x+1, & \text{если } 0 < x \leqslant 2; \\ 3, & \text{если } 2 < x \leqslant 4. \end{cases}$$

а) Найти $D(f)$;

б) вычислить $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(3{,}2)$, $f(4)$, $f(5)$;

в) найти $E(f)$.

Решение. а) Область определения функции состоит из трех промежутков: $(-\infty; 0]$, $(0; 2]$ и $(2; 4]$. Объединив их, получим луч $(-\infty; 4]$.

Итак, $D(f) = (-\infty; 4]$.

б) Значение $x = -2$ удовлетворяет условию $x \leqslant 0$, следовательно, $f(-2)$ надо вычислять по первой строке задания функции: $f(x) = -x^2$; значит, $f(-2) = -(-2)^2 = -4$.

Значение $x = 0$ удовлетворяет условию $x \leqslant 0$, следовательно, $f(0)$ надо вычислять по первой строке задания функции: $f(x) = -x^2$; значит, $f(0) = -0^2 = 0$.

Значение $x = 2$ удовлетворяет условию $0 < x \leqslant 2$, следовательно, $f(2)$ надо вычислять по второй строке задания функции: $f(x) = x + 1$; значит, $f(2) = 2 + 1 = 3$.

Значение $x = 3{,}2$ удовлетворяет условию $2 < x \leqslant 4$, следовательно, $f(3{,}2)$ надо вычислять по третьей строке задания функции: $f(x) = 3$; значит, $f(3{,}2) = 3$.

Значение $x = 4$ удовлетворяет условию $2 < x \leqslant 4$, следовательно, $f(4)$ надо вычислять по третьей строке задания функции: $f(x) = 3$; значит, $f(4) = 3$.

Значение $x = 5$ не удовлетворяет ни одному из трех условий задания функции, а потому $f(5)$ в данном случае вычислить нельзя, точка $x = 5$ не принадлежит области определения функции. Задание вычислить $f(5)$ *некорректно*.

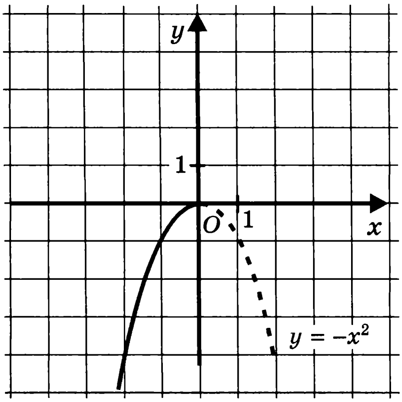


Рис. 72

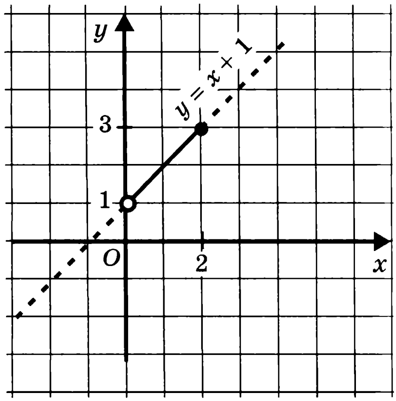


Рис. 73

в) Область (впрочем, не возбраняется использовать термин «множество») значений функции, как мы уже отметили выше, можно найти с помощью графика функции. Построение графика осуществим «по кусочкам». Сначала построим параболу $y = -x^2$ и выделим ее часть на луче $(-\infty; 0]$ (рис. 72). Затем построим прямую $y = x + 1$ и выделим ее часть на полуинтервале $(0; 2]$ (рис. 73). Далее построим прямую $y = 3$ и выделим ее часть на полуинтервале $(2; 4]$ (рис. 74). Наконец, все три «кусочка» изобразим в одной системе координат — это и будет график функции $y = f(x)$ (рис. 75).

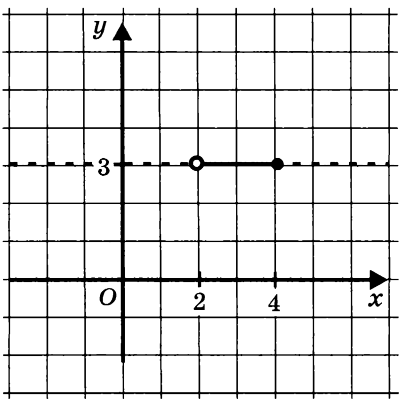


Рис. 74

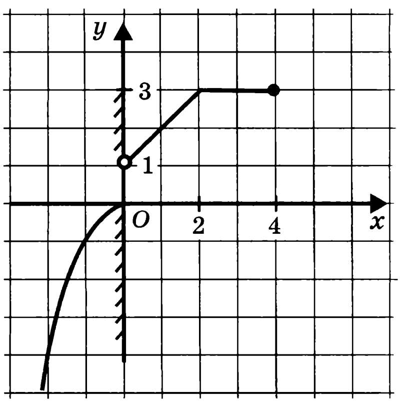


Рис. 75

Теперь хорошо видно, что область значений функции состоит из двух промежутков: луча $(-\infty; 0]$ — он сплошь заполняется ординатами точек ветви параболы $y = -x^2$, $x \leqslant 0$ — и полуинтервала $(1; 3]$ — он сплошь заполняется ординатами точек участка прямой $y = x + 1$, $0 < x \leqslant 2$. Итак, $E(f) = (-\infty; 0] \cup (1; 3]$. ◼

§ 9. СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ ФУНКЦИИ

Задать функцию — это значит указать п р а в и л о, которое позволяет по произвольно выбранному из области определения функции значению независимой переменной вычислить соответствующее значение зависимой переменной. Чаще всего это правило связано с ф о р м у л о й или с несколькими формулами — такой способ задания функции обычно называют *аналитическим*. Все функции, рассмотренные в § 8, были заданы аналитически. Между тем есть другие способы задания функции, о них и пойдет речь в настоящем параграфе.

Пусть F — некоторая линия на координатной плоскости xOy. Спроецировав эту линию на ось абсцисс, мы получим, например, отрезок $[a; b]$ (рис. 76). Возьмем произвольную точку x из отрезка $[a; b]$ и проведем через нее прямую, параллельную оси ординат. Потребуем дополнительно, чтобы каждая такая прямая пересекала линию F только в одной точке — на рис. 76 соответствующая точка обозначена буквой M. Ордината точки M — это число $f(x)$, соответствующее выбранному значению x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ задана функция $y = f(x)$. Такой способ задания функции называют *графическим*.

Если функция была задана аналитически и нам удалось построить график функции, то мы фактически перешли от аналитического способа задания функции к графическому. Обратный же переход удается осуществить далеко не всегда. Как правило, это довольно трудная, но интересная задача.

Не всякая линия на координатной плоскости может рассматриваться как график некоторой функции. Например, окружность, заданная уравнением $x^2 + y^2 = 9$ (рис. 77), не является графиком функции. В самом деле, спроектировав окружность на ось x, получим отрезок $[-3; 3]$. Любая прямая $x = a$, где $|a| < 3$, пересекает

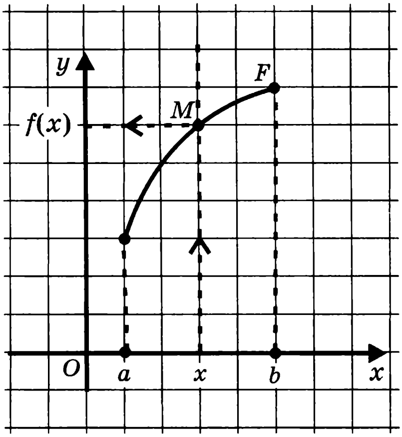


Рис. 76

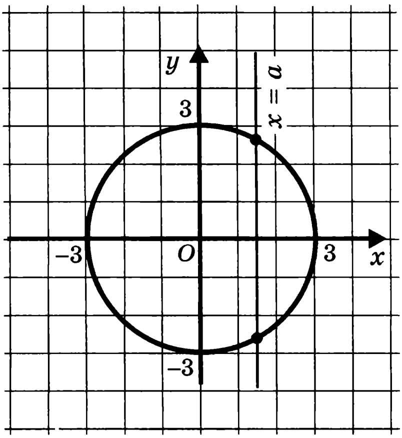


Рис. 77

эту линию в двух точках, а для задания функции прямая $x = a$ должна пересекать линию F только в одной точке. В то же время если эту окружность разрезать на две части — верхнюю полуокружность (рис. 78) и нижнюю полуокружность (рис. 79), — то каждую из полуокружностей можно считать графиком некоторой функции, причем в обоих случаях несложно от графического способа задания функции перейти к аналитическому. Из уравнения

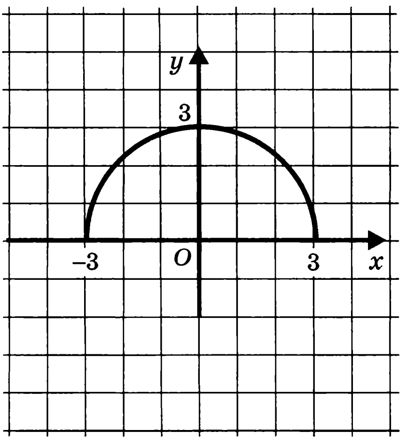


Рис. 78

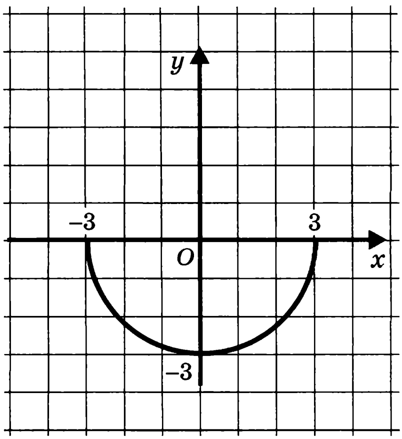


Рис. 79

$x^2 + y^2 = 9$ находим: $y^2 = 9 - x^2$; $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$. Верхняя полуокружность окружности $x^2 + y^2 = 9$ является графиком функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ (см. рис. 78), а нижняя полуокружность окружности $x^2 + y^2 = 9$ является графиком функции $y = -\sqrt{9 - x^2}$ (см. рис. 79).

Этот пример позволяет обратить внимание на одно существенное обстоятельство. Посмотрите на график функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ (см. рис. 78). Сразу ясно, что $D(f) = [-3; 3]$, что, например, $y_{наиб} = 3$, а $y_{наим} = 0$, что функция возрастает на отрезке $[-3; 0]$ и убывает на отрезке $[0; 3]$. А если бы речь шла об отыскании области определения аналитически заданной функции $y = \sqrt{9 - x^2}$? Тогда пришлось бы, как мы это делали в § 8, решать неравенство $9 - x^2 \geqslant 0$. Потрудиться пришлось бы и для отыскаяния наименьшего и наибольшего значений функции, и для исследования ее на монотонность. Аналитический и графический способы задания функции хороши каждый по-своему, потому-то обычно и стараются работать одновременно и тем и другим способом. Впрочем, за два года изучения курса алгебры в школе вы к этому уже привыкли.

Кроме аналитического и графического на практике применяют *табличный* способ задания функции. При этом способе приводится таблица, в которой указаны значения функции (иногда точные, иногда приближенные) для конечного множества значений аргумента. Примерами табличного задания функции могут служить таблицы квадратов чисел, кубов чисел, квадратных корней и т. д.

Во многих случаях табличное задание функции является удобным. Оно позволяет найти значение функции для имеющихся в таблице значений аргумента без всяких вычислений.

Аналитический, графический, табличный — наиболее популярные способы задания функции, для наших нужд этих способов вполне достаточно. На самом деле в математике имеется довольно много различных способов задания функции, но мы познакомим вас еще только с одним способом, который используется в весьма своеобразных ситуациях. Речь идет о *словесном* способе, когда правило задания функции описывается словами. Приведем примеры.

Пример 1. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех неотрицательных чисел с помощью следующего правила: каждому числу $x \geqslant 0$ ставится в соответствие первый знак после запятой в десятичной записи числа x.

Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 5$ (первый знак после запятой — цифра 5); если $x = 13{,}002$, то $f(x) = 0$; если $x = \frac{2}{3}$, то, записав $\frac{2}{3}$ в виде бесконечной десятичной дроби 0,6666..., находим: $f(x) = 6$. А чему равно значение $f(15)$? Оно равно 0, так как $15 = 15{,}000...$, и мы видим, что первый десятичный знак после запятой есть 0 (вообще-то верно и равенство $15 = 14{,}999...$, но обычно не рассматривают бесконечные периодические десятичные дроби с периодом 9).

Любое неотрицательное число x можно записать в виде десятичной дроби (конечной или бесконечной), а потому для каждого значения x можно найти определенное значение первого знака после запятой, так что мы можем говорить о функции, хотя и несколько необычной. У этой функции

$$D(f) = [0; +\infty), \quad E(f) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$ ◼

Пример 2. Функция $y = f(x)$ задана на множестве всех действительных чисел с помощью следующего правила: каждому числу x ставится в соответствие наибольшее из всех целых чисел, которые не превосходят x. Иными словами, функция $y = f(x)$ определяется следующими условиями:

а) $f(x)$ — целое число;

б) $f(x) \leqslant x$ (поскольку по условию $f(x)$ не превосходит x);

в) $f(x) + 1 > x$ (по условию $f(x)$ — наибольшее целое число, не превосходящее x, значит, $f(x) + 1$ уже больше, чем x).

Если, скажем, $x = 2{,}534$, то $f(x) = 2$, поскольку, во-первых, 2 — целое число, во-вторых, $2 < 2{,}534$ и, в-третьих, следующее целое число 3 уже больше, чем 2,534.

Если $x = 47$, то $f(x) = 47$, поскольку, во-первых, 47 — целое число, во-вторых, $47 \leqslant 47$ (точнее, $47 = 47$) и, в-третьих, следующее за числом 47 целое число 48 уже больше, чем 47.

А чему равно значение $f(-0{,}01)$? Оно равно -1. Проверяйте: -1 — наибольшее из всех целых чисел, которые не превосходят числа $-0{,}01$.

У этой функции $D(f) = (-\infty; +\infty)$, а $E(f) = \boldsymbol{Z}$ (множество целых чисел). ◼

Функцию, о которой шла речь в примере 2, называют *целой частью числа*; для целой части числа x используют обозначение $[x]$. Например, $[2{,}534] = 2$, $[47] = 47$, $[-0{,}01] = -1$. Очень своеобразно выглядит график функции $y = [x]$ (рис. 80).

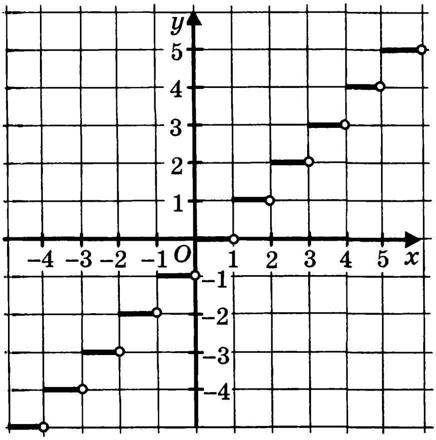


Рис. 80

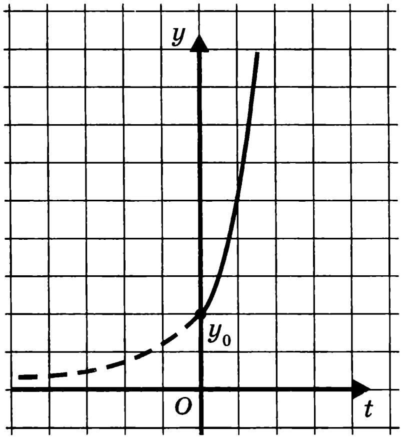


Рис. 81

Функции во многих случаях служат математическими моделями реальных процессов. Например, любой равномерный процесс, в котором участвуют две переменные величины x и y, описывается формулой $y = kx + m$, где k, m — действительные числа; это линейная функция. Закон свободного падения описывается функцией $s = \frac{gt^2}{2}$; здесь время t — независимая переменная, а зависимая переменная s — пройденный путь. Многие подобные примеры известны вам из курса физики.

Приведем еще три примера.

1. Предположим, что колония живых организмов находится в благоприятных условиях: пространство, занимаемое колонией, и пищевые ресурсы неограниченны, а хищников, питающихся организмами данной колонии, нет, благодаря чему рождаемость выше, чем смертность. В таких условиях обычно считают, что скорость изменения численности колонии пропорциональна численности (чем больше организмов, тем выше скорость; k — коэффициент пропорциональности). Математики установили, что число организмов колонии выражается формулой $y = y_0e^{kt}$, где y_0 — численность колонии в момент времени $t = 0$, а $e \approx 2{,}7$ (число e играет важную роль в математике, об этом вы узнаете в 11-м классе). На рис. 81 схематически представлен график функции $y = y_0e^{kt}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

Примерно по такому же закону изменяется величина вклада в банке, этот закон называют *законом показательного роста*.

2. При радиоактивном распаде мгновенная скорость распада в момент времени t пропорциональна наличному количеству вещества.

Закон радиоактивного распада выражается формулой $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; здесь m_0 — масса вещества в момент времени $t = 0$, T — время, за которое масса вещества уменьшится вдвое (так называемый *период полураспада*). На рис. 82 схематически представлен график функции $m = m_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (пунктиром добавлена гипотетическая часть графика при $t < 0$).

Оба графика, представленные на рис. 81 и 82 (со сплошной и пунктирной частями), называют ***экспонентами***. Подробнее об экспоненте речь пойдет в старших классах.

3. В комнату с температурой 20 °С внесли кипящий чайник. При определенных условиях можно считать, что скорость изменения температуры нагретого тела пропорциональна разности между температурой тела и температурой окружающей среды. Температура T тела в момент времени t выражается формулой $T = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}$; здесь T_1 — температура окружающей среды, а T_0 — температура тела в момент времени $t = 0$. В ситуации с чайником $T_1 = 20°$, а $T_0 = 100°$. Значит, $T = 20 + 80e^{-kt}$. График этой функции схематически представлен на рис. 83. Прямая $T = 20$ — асимптота графика.

График наглядно иллюстрирует вполне понятное обстоятельство: с течением времени температура чайника постепенно приближается к температуре окружающей среды. Процессы подобного рода называют ***процессами выравнивания***.

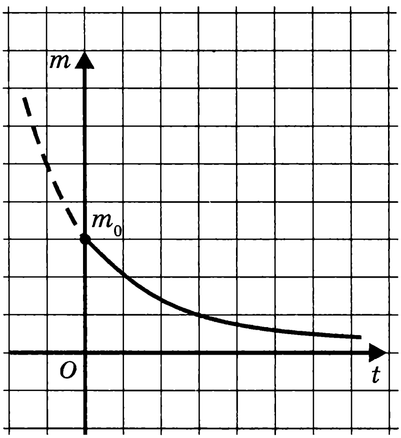


Рис. 82

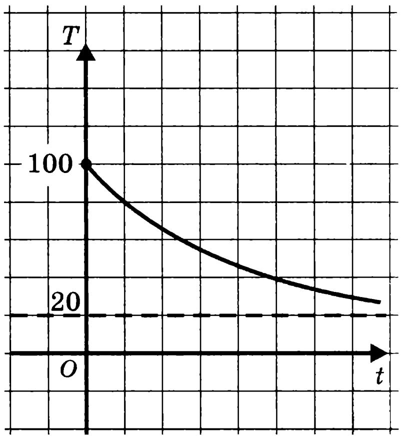


Рис. 83

§ 10. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

В 7-м и 8-м классах вы изучили некоторые свойства функций. Сейчас мы их соберем вместе, в один параграф, напомним их суть и геометрический смысл и договоримся о том, в каком порядке будем перечислять эти свойства при чтении графика функции. Обратите внимание: во всех определениях фигурирует числовое множество X, являющееся подмножеством области определения функции: $X \subset D(f)$. На практике чаще всего встречаются случаи, когда X — числовой промежуток (отрезок, интервал, луч и т. д.).

Определение 1. Функцию $y = f(x)$ называют **возрастающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых двух элементов x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение 2. Функцию $y = f(x)$ называют **убывающей на множестве** $X \subset D(f)$, если для любых двух элементов x_1 и x_2 множества X, таких, что $x_1 < x_2$, выполняется неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Иными словами, *функция возрастает, если большему значению аргумента соответствует б о л ь ш е е значение функции; функция убывает, если большему значению аргумента соответствует м е н ь ш е е значение функции.*

В 7-м и 8-м классах мы использовали следующее геометрическое истолкование понятий возрастания или убывания функции: двигаясь по графику возрастающей функции слева направо, мы как бы поднимаемся в горку (рис. 84); двигаясь по графику убывающей функции слева направо, как бы спускаемся с горки (рис. 85).

Обычно термины «возрастающая функция», «убывающая функция» объединяют общим названием **монотонная функция**, а исследование функции на возрастание или убывание называют *исследованием функции на монотонность.*

Отметим еще одно обстоятельство: если функция возрастает (или убывает) в своей естественной области определения, то обычно

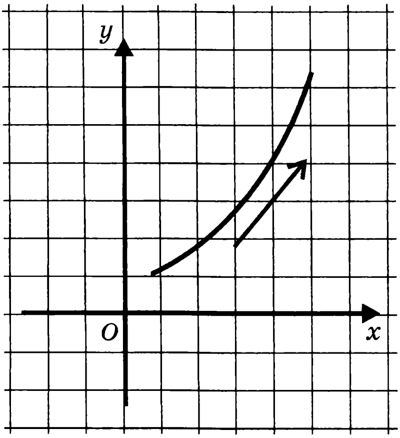


Рис. 84

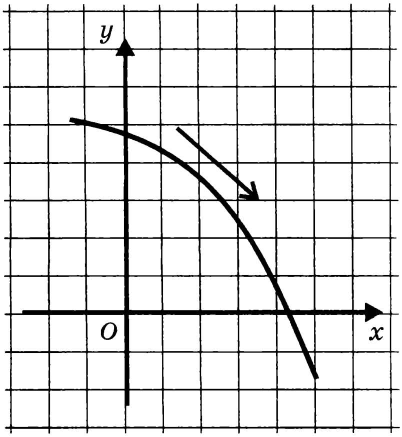


Рис. 85

говорят, что функция возрастающая (или убывающая) — без указания числового множества X.

П р и м е р 1. Исследовать на монотонность функцию

$$y = 5 - 2x.$$

Р е ш е н и е. Введем обозначение: $f(x) = 5 - 2x$. Возьмем произвольные значения аргумента x_1 и x_2, и пусть $x_1 < x_2$. Тогда по свойствам числовых неравенств (мы с вами изучали их в курсе алгебры 8-го класса) будем иметь:

$$-2x_1 > -2x_2;$$
$$5 - 2x_1 > 5 - 2x_2.$$

Последнее неравенство означает, что $f(x_1) > f(x_2)$.

Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это означает, что заданная функция убывает (на всей числовой прямой). ◼

Определение 3. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной снизу на множестве $X \subset D(f)$**, если с у щ е с т в у е т число m такое, что д л я л ю б о г о значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) > m$.

Определение 4. Функцию $y = f(x)$ называют **ограниченной сверху на множестве $X \subset D(f)$**, если с у щ е с т в у е т число M такое, что д л я л ю б о г о значения $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) < M$.

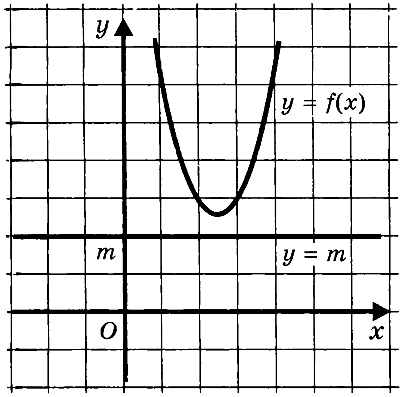


Рис. 86

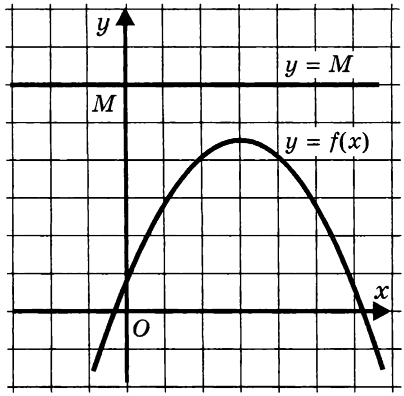


Рис. 87

Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об ограниченности функции снизу или сверху во всей области определения.

Если функция ограничена и снизу и сверху, то ее называют **ограниченной**.

Ограниченность функции легко прочитывается по ее графику: функция ограничена снизу — это значит, что ее график целиком расположен *выше* некоторой горизонтальной прямой $y = m$ (рис. 86); функция ограничена сверху — это значит, что ее график целиком расположен *ниже* некоторой горизонтальной прямой $y = M$ (рис. 87).

Пример 2. Исследовать на ограниченность функцию

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. С одной стороны, вполне очевидно, что верно неравенство

$$\sqrt{9 - x^2} \geqslant 0$$

(по определению квадратного корня $\sqrt{a} \geqslant 0$). Это означает, что функция ограничена снизу (в своей области определения, т. е. на отрезке $[-3; 3]$).

С другой стороны, для любого $x \in [-3; 3]$ выполняется неравенство $9 - x^2 \leqslant 9$, а потому

$$\sqrt{9 - x^2} \leqslant 3.$$

Это означает, что функция ограничена сверху.

А теперь посмотрите на график заданной функции (см. рис. 78 на с. 92). Ограниченность функции и сверху и снизу прочитывается по графику достаточно легко. ◼

Определение 5. Число m называют **наименьшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = m$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \geqslant f(x_0).$$

Определение 6. Число M называют **наибольшим значением функции $y = f(x)$ на множестве $X \subset D(f)$**, если:

1) существует число $x_0 \in X$ такое, что $f(x_0) = M$;

2) для любого значения $x \in X$ выполняется неравенство

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

Наименьшее значение функции мы обозначали и в 7-м, и в 8-м классах символом $y_{\text{наим}}$, а наибольшее — символом $y_{\text{наиб}}$. Если множество X не указано, то подразумевается, что речь идет об отыскании наименьшего или наибольшего значения функции во всей области определения.

Справедливы следующие утверждения.

1) *Если у функции существует $y_{\text{наим}}$, то она ограничена снизу.*

2) *Если у функции существует $y_{\text{наиб}}$, то она ограничена сверху.*

3) *Если функция не ограничена снизу*, то $y_{\text{наим}}$ *не существует.*

4) *Если функция не ограничена сверху*, то $y_{\text{наиб}}$ *не существует.*

Приведем доказательства этих утверждений.

1) Пусть у функции $y = f(x)$ $x \in X$ есть наименьшее значение. Это значит, что существует число $x_0 \in X$ такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Это как раз и означает, что функция ограничена снизу. Свойство 2) доказывается аналогично.

3) Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что $y_{\text{наим}}$ существует. Тогда согласно утверждению 1) функция ограничена снизу, но это противоречит условию. Значит,

наше предположение неверно, т. е. наименьшего значения у функции нет. Свойство 4) доказывается аналогично.

Пример 3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. В примере 2 мы уже доказали, что $0 \leqslant \sqrt{9 - x^2} \leqslant 3$, где $x \in [-3; 3]$. Кроме того, если $x = \pm 3$, то $y = 0$. По определению 5 это означает, что $y_{\text{наим}} = 0$. Аналогично, если $x = 0$, то $y = 3$. Поэтому $y_{\text{наиб}} = 3$. Отметим, что полученные результаты хорошо иллюстрирует график функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ (см. рис. 78). ◼

Пример 4. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = \sqrt{16 - 4x^2 + 12x}$; б) $y = \dfrac{x^8 + x^4 + 4x^2 + 4}{x^6 + 2x^4}$.

Решение. а) Имеем:

$$y = \sqrt{16 - (4x^2 - 12x + 9) + 9} = \sqrt{25 - (2x - 3)^2} \leqslant \sqrt{25} = 5.$$

В точке $x = 1{,}5$ функция принимает значение 5, во всех остальных точках значения функции меньше, чем 5. Значит, $y_{\text{наиб}} = 5$. С другой стороны, должно выполняться неравенство $16 - 4x^2 + 12x \geqslant 0$, т. е. $-4(x + 1)(x - 4) \geqslant 0$. В точках $x = -1$, $x = 4$ функция обращается в 0, во всех остальных точках она положительна. Значит, $y_{\text{наим}} = 0$.

б) Имеем: $y = \dfrac{x^8 + x^4 + 4x^2 + 4}{x^6 + 2x^4} = \dfrac{x^8 + (x^2 + 2)^2}{x^4(x^2 + 2)}$. Пусть $x^4 = a$, $x^2 + 2 = b$. Тогда $y = \dfrac{a^2 + b^2}{ab}$. Это выражение не меньше, чем 2. В самом деле, $\dfrac{a^2 + b^2}{ab} - 2 = \dfrac{(a - b)^2}{ab} \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $a = b$, т. е. при условии, что $x^4 = x^2 + 2$. Из этого уравнения находим: $x^2 = 2$; $x = \pm\sqrt{2}$. Итак, $y_{\text{наим}} = y(\sqrt{2}) = y(-\sqrt{2}) = 2$.

Докажем, что заданная функция не ограничена сверху. Выполним некоторые преобразования:

$$y = \frac{x^8 + (x^2 + 2)^2}{x^4(x^2 + 2)} = \frac{x^4}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 2}{x^4} = \frac{(x^2 + 2)(x^2 - 2) + 4}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 2}{x^4} =$$

$$= x^2 - 2 + \frac{4}{x^2 + 2} + \frac{x^2 + 2}{x^4}.$$

Предположим противное: функция ограничена сверху, т. е. существует число M такое, что для любого x выполняется неравенство $y \leqslant M$.

Возьмем точку $x = \sqrt{M+3}$. Тогда $x^2 = M + 3$, $x^2 - 2 = M + 1$, $x^2 - 2 > M$. Так как далее $\frac{4}{x^2+2} > 0$ и $\frac{x^2+2}{x^4} > 0$, получаем, что $x^2 - 2 + \frac{4}{x^2+2} + \frac{x^2+2}{x^4} > M$.

Мы предположили, что для любого x выполняется неравенство $y \leqslant M$, а оказалось, что в точке $x = \sqrt{M+3}$ выполняется неравенство $y > M$. Получили противоречие, значит, наше предположение неверно, т. е. функция не ограничена сверху. Но тогда наибольшего значения у нее нет.

Ответ: а) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}} = 5$; б) $y_{\text{наим}} = 2$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

В 7-м и 8-м классах мы упоминали еще два свойства функций. Первое назвали свойством выпуклости функции. Считается, что *функция выпукла вниз* на промежутке X, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком прямой, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит ниже проведенного отрезка (рис. 88). *Функция выпукла вверх* на промежутке X, если, соединив любые две точки ее графика (с абсциссами из X) отрезком прямой, мы обнаружим, что соответствующая часть графика лежит выше проведенного отрезка (рис. 89).

Второе свойство — *непрерывность функции на промежутке* X — означает, что график функции на промежутке X — сплошной, не имеет разрывов.

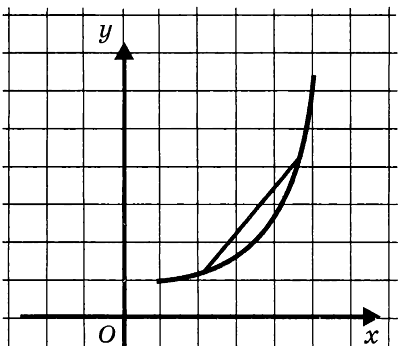


Рис. 88

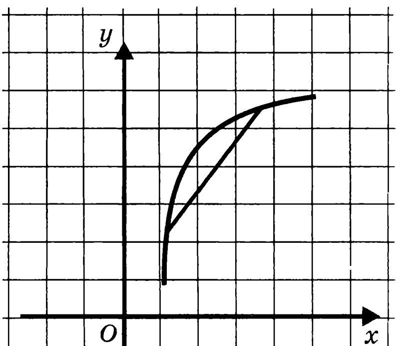


Рис. 89

Замечание. На самом деле в математике все обстоит, как говорится, с точностью до наоборот: график функции изображается в виде сплошной линии (без разрывов) только тогда, когда доказана непрерывность функции. Но формальное определение непрерывности функции, достаточно сложное и тонкое, нам пока не по силам. То же самое можно сказать и о выпуклости функции. Обсуждая указанные два свойства функций, будем по-прежнему опираться на наглядно-интуитивные представления.

А теперь вспомним о тех функциях, которые мы с вами изучали в 7-м и 8-м классах, построим их графики и перечислим их свойства, придерживаясь определенного порядка, например такого: область определения; монотонность; ограниченность; $y_{\text{наим}}$, $y_{\text{наиб}}$; непрерывность; область значений; иногда будем говорить и о выпуклости.

Впоследствии появятся новые свойства функций, соответственно будет меняться и перечень свойств.

1. Линейная функция $y = kx + m$

Графиком функции $y = kx + m$ является прямая (рис. 90—92).

Свойства функции $y = kx + m$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) возрастает, если $k > 0$ (рис. 91), убывает, если $k < 0$ (рис. 92);
3) не ограничена ни снизу, ни сверху;
4) нет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
5) функция непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty; +\infty)$.

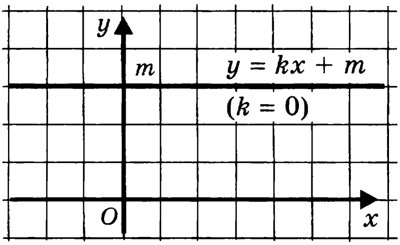


Рис. 90

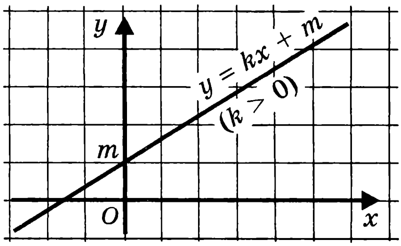


Рис. 91

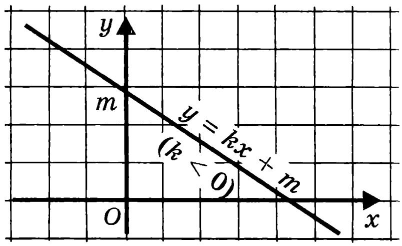


Рис. 92

2. Функция $y = kx^2$ $(k \neq 0)$

Графиком функции $y = kx^2$ является парабола с вершиной в начале координат и с ветвями, направленными вверх, если $k > 0$ (рис. 93), и вниз, если $k < 0$ (рис. 94). Прямая $x = 0$ (ось y) является осью параболы.

Свойства функции $y = kx^2$

Для случая $k > 0$ (рис. 93):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;
3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует;
5) непрерывна;
6) $E(f) = [0; +\infty)$;
7) выпукла вниз.

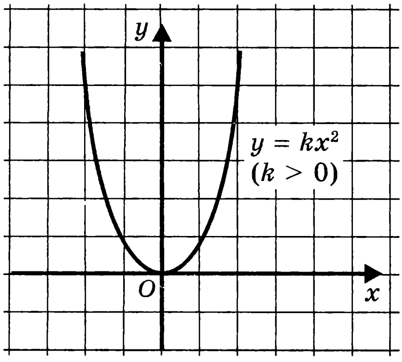


Рис. 93

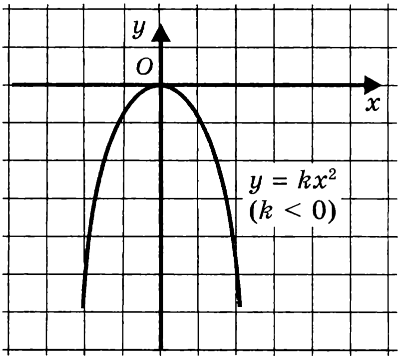


Рис. 94

Обратите внимание: на промежутке $(-\infty;\ 0]$ функция убывает, а на промежутке $[0;\ +\infty)$ функция возрастает. Эти промежутки называют *промежутками монотонности* функции $y = kx^2$. Понятие промежутка монотонности будем использовать и для других функций.

Для случая $k < 0$ (рис. 94):

1) $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$;
2) возрастает на луче $(-\infty;\ 0]$, убывает на луче $[0;\ +\infty)$;
3) не ограничена снизу, ограничена сверху;
4) $y_{\text{наим}}$ не существует, $y_{\text{наиб}} = 0$;
5) непрерывна;
6) $E(f) = (-\infty;\ 0]$;
7) выпукла вверх.

График функции $y = f(x)$ строится по точкам; чем больше точек вида $(x;\ f(x))$ мы возьмем, тем более точное представление о графике получим. Если этих точек взять достаточно много, то и представление о графике сложится более полное. Именно в этом случае интуиция и подсказывает нам, что график надо изобразить в виде сплошной линии (в данном случае в виде параболы). А уж затем, читая график, мы делаем выводы о непрерывности функции, о ее выпуклости вниз или вверх, об области значений функции. Вы должны понимать, что из перечисленных семи свойств «законными» являются лишь свойства 1), 2), 3), 4), — «законными» в том смысле, что мы в состоянии обосновать их, ссылаясь на точные определения (ниже мы покажем это на примере функции $y = \sqrt{x}$, см. с. 106). Об остальных свойствах у нас имеются только наглядно-интуитивные представления. Кстати, в этом нет ничего плохого. Из истории развития математики известно, что человечество часто и долго пользовалось различными свойствами тех или иных объектов, не зная точных определений. Потом, когда такие определения удавалось сформулировать, все становилось на свои места.

3. Функция $y = \frac{k}{x}$

Графиком функции является гипербола, оси координат служат асимптотами гиперболы (рис. 95, 96).

Свойства функции $y = \frac{k}{x}$

1) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

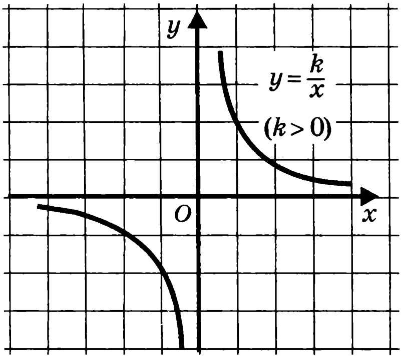


Рис. 95

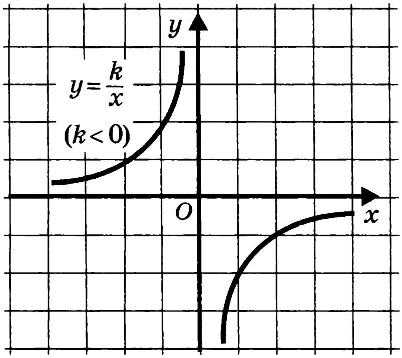


Рис. 96

2) если $k > 0$, то функция убывает на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$ (рис. 95); если $k < 0$, то функция возрастает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; +\infty)$ (рис. 96);

3) не ограничена ни снизу, ни сверху;

4) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;

5) функция непрерывна на открытом луче $(-\infty; 0)$ и на открытом луче $(0; +\infty)$;

6) $E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

4. Функция $y = \sqrt{x}$

Графиком функции является ветвь параболы (рис. 97).

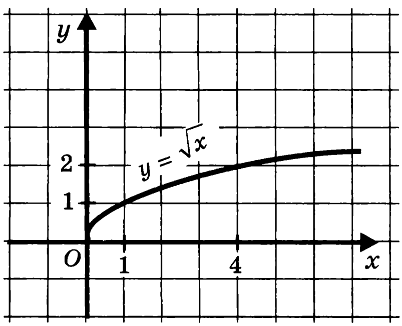


Рис. 97

Свойства функции $y = \sqrt{x}$

1) $D(f) = [0; +\infty)$;

2) возрастает;

3) ограничена снизу, не ограничена сверху;

4) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует;

5) непрерывна;

6) $E(f) = [0; +\infty)$;

7) выпукла вверх.

На с. 105 мы упомянули, что в принципе мы в состоянии для известных функций обосновать свойства 1) — 4). Сделаем это в качестве примера для функции $y = \sqrt{x}$. Введем привычное обозначение: $f(x) = \sqrt{x}$.

1) $D(f) = [0; +\infty)$. Речь идет о естественной области определения функции, т. е. об области определения выражения $\sqrt{x}$. Она задается неравенством $x \geqslant 0$, отсюда и следует, что $D(f) = [0; +\infty)$.

2) Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Предположим, что $\sqrt{x_1} \geqslant \sqrt{x_2}$. Тогда $(\sqrt{x_1})^2 \geqslant (\sqrt{x_2})^2$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, т. е. верно неравенство $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$. Итак, из $0 \leqslant x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, а это и означает, что функция возрастает на луче $[0; +\infty)$.

3) Ясно, что функция ограничена снизу, поскольку для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} \geqslant 0$. Докажем, что функция не ограничена сверху. Предположим противное, что она ограничена сверху, т. е. существует положительное число M такое, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} < M$. Возьмем точку $x_0 = (M + 1)^2$. Тогда $f(x_0) = \sqrt{x_0} = \sqrt{(M+1)^2} = M + 1 > M$. Итак, мы предположили, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} < M$, и в то же время нашли конкретную точку x_0, в которой это неравенство не выполняется. Полученное противоречие означает, что наше предположение неверно, а потому функция не ограничена сверху.

4) Имеем: $f(0) = 0$, и для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $\sqrt{x} \geqslant 0$. Это значит, что $y_{\text{наим}} = 0$. А поскольку функция не ограничена сверху, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

5. Функция $y = |x|$

Графиком функции является объединение двух лучей: $y = x$, $x \geqslant 0$ и $y = -x$, $x \leqslant 0$ (рис. 98).

Свойства функции $y = |x|$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;

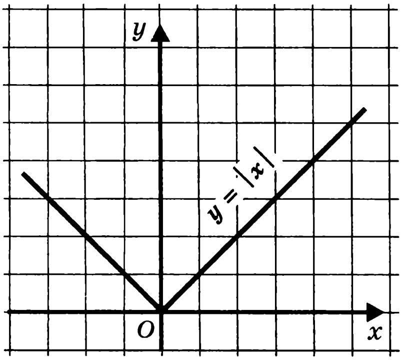


Рис. 98

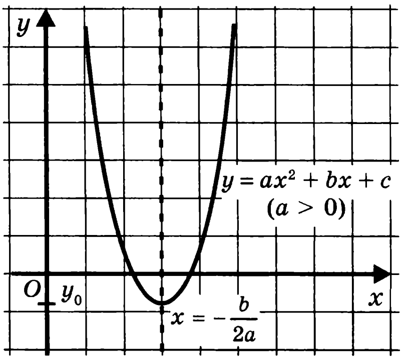


Рис. 99

3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует;
5) непрерывна;
6) $E(f) = [0; +\infty)$.

6. Функция $y = ax^2 + bx + c$

Графиком функции является парабола с вершиной в точке $(x_0; y_0)$, где

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = f(x_0) = ax_0^2 + bx_0 + c_0,$$

и с ветвями, направленными вверх, если $a > 0$ (рис. 99), и вниз, если $a < 0$ (рис. 100). Прямая $x = -\frac{b}{2a}$ является осью параболы.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$

Для случая $a > 0$ (рис. 99):
1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) убывает на луче $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right]$, возрастает на луче $\left[-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$;
3) ограничена снизу, не ограничена сверху;
4) $y_{\text{наим}} = y_0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует;

5) непрерывна;

6) $E(f) = [y_0; +\infty)$;

7) выпукла вниз.

Для случая $a < 0$ (рис. 100):

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) возрастает на луче $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$, убывает на луче $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$;

3) не ограничена снизу, ограничена сверху;

4) $y_{\text{наим}}$ не существует, $y_{\text{наиб}} = y_0$;

5) непрерывна;

6) $E(f) = (-\infty; y_0]$;

7) выпукла вверх.

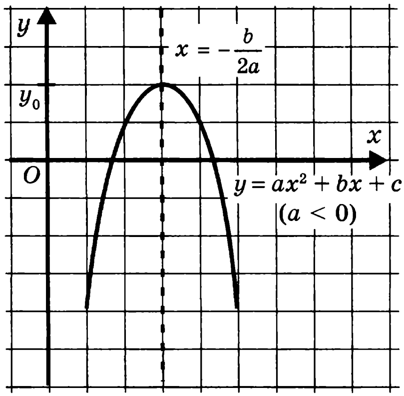


Рис. 100

Смотр наших знаний о функциях можно считать законченным. Разумеется, приведенным перечнем в реальной жизни не обойтись. Некоторые новые функции и их свойства встретятся нам уже в этой главе.

Пример 5. Прочитать график функции $y = f(x)$, заданной графически (рис. 101), где ось x — горизонтальная асимптота графика.

Решение. Прочитать график функции — это значит, опираясь на график, перечислить свойства функции.

1) $D(f) = [-4; +\infty)$;

2) возрастает на отрезке $[-4; 0]$, убывает на луче $[0; +\infty)$;

3) ограничена и снизу и сверху;

4) $y_{\text{наим}}$ не существует, $y_{\text{наиб}} = 3$;

5) непрерывна;

6) $E(f) = (0; 3]$. ◨

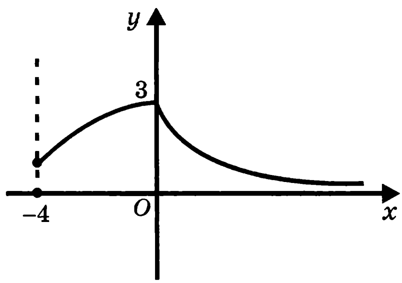


Рис. 101

§ 11. ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

В предыдущем параграфе мы обсуждали только те свойства функций, которые в той или иной степени уже были вам знакомы из курса алгебры 7—8-го классов. Там же было отмечено, что запас свойств функций будет постепенно пополняться. О двух новых свойствах и пойдет речь в настоящем параграфе.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **четной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = f(x).$$

Определение 2. Функцию $y = f(x)$, $x \in X$ называют **нечетной**, если для любого значения x из множества X выполняется равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Пример 1. Доказать, что $y = x^4$ — четная функция.

Решение. Имеем: $f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4$. Но $(-x)^4 = x^4$. Значит, для любого x выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является четной. ■

Аналогично можно доказать, что функции $y = x^2$, $y = x^6$, $y = x^8$ являются четными.

Пример 2. Доказать, что $y = x^3$ — нечетная функция.

Решение. Имеем: $f(x) = x^3$, $f(-x) = (-x)^3$. Но $(-x)^3 = -x^3$. Значит, для любого x выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. функция является нечетной. ■

Аналогично можно доказать, что функции $y = x$, $y = x^5$, $y = x^7$ являются нечетными.

Мы с вами не раз уже убеждались в том, что новые термины в математике чаще всего имеют «земное» происхождение, т. е. их можно каким-то образом объяснить. Так обстоит дело и с четными и нечетными функциями. Смотрите: $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ — нечетные функции, тогда как $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^6$ — четные функции. И вообще для любой функции вида $y = x^n$ (ниже мы специально займемся изучением этих функций), где n — целое число, можно сделать вывод: если n — нечетное число, то функция $y = x^n$ — нечетная; если же n — четное число, то функция $y = x^n$ — четная.

Существуют функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными. Такова, например, функция $y = 2x + 3$. В самом деле, положим $f(x) = 2x + 3$ и сравним, например, значения функции в точках $x = 1$ и $x = -1$. Имеем: $f(1) = 5$, $f(-1) = 1$. Как видите, здесь $f(-1) \neq f(1)$ и $f(-1) \neq -f(1)$. Значит, не может выполняться ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$.

Итак, функция может быть четной, нечетной, а также ни той ни другой. Изучение вопроса о том, является ли заданная функция четной или нечетной, обычно называют *исследованием функции на четность.*

В определениях 1 и 2 речь идет о значениях функции в точках x и $-x$. Тем самым предполагается, что функция определена и в точке x, и в точке $-x$. Это значит, что точка $-x$ принадлежит области определения функции одновременно с точкой x. Если числовое множество X вместе с каждым своим элементом x содержит и противоположный элемент $-x$, то X называют **симметричным множеством.** Скажем, $(-2; 2)$, $[-5; 5]$, $(-\infty; +\infty)$ — симметричные множества, в то время как $[0; +\infty)$, $(-2; 3)$, $[-5; 4]$ — несимметричные множества. ***Если функция $y = f(x)$ — четная или нечетная, то ее область определения $D(f)$ — симметричное множество.*** Если же $D(f)$ — несимметричное множество, то функция $y = f(x)$ не может быть ни четной, ни нечетной.

Учитывая сказанное, рекомендуем при исследовании функции на четность использовать следующий алгоритм.

Алгоритм исследования функции $y = f(x)$ на четность

1. Установить, симметрично ли множество $D(f)$ — область определения функции. Если нет, то объявить, что функция не является ни четной, ни нечетной. Если да, то переходить ко второму шагу алгоритма.
2. Составить выражение для $f(-x)$.
3. Сравнить $f(-x)$ и $f(x)$:
   а) если $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$, то функция четная;
   б) если $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$, то функция нечетная;
   в) если хотя бы в одной точке $x \in D(f)$ выполняется соотношение $f(-x) \neq f(x)$ и хотя бы в одной точке $x \in D(f)$ выполняется соотношение $f(-x) \neq -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной.

Пример 3. Исследовать на четность функцию:

а) $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$; в) $y = \frac{x-4}{x^2-9}$;

б) $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$; г) $y = \sqrt{x-3}$.

Решение. а) $y = f(x)$, где $f(x) = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^4 + \frac{2}{(-x)^6} = x^4 + \frac{2}{x^6}$.

3) Замечаем, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Таким образом, $y = x^4 + \frac{2}{x^6}$ — четная функция.

б) $y = f(x)$, где $f(x) = x^5 - \frac{3}{x^3}$.

1) Функция определена при всех значениях x, кроме $x = 0$. Следовательно, $D(f)$ — симметричное множество.

2) $f(-x) = (-x)^5 - \frac{3}{(-x)^3} = -x^5 + \frac{3}{x^3} = -(x^5 - \frac{3}{x^3})$.

3) Замечаем, что для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Таким образом, $y = x^5 - \frac{3}{x^3}$ — нечетная функция.

в) $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x-4}{x^2-9}$.

1) Функция определена во всех точках x, кроме тех, которые обращают знаменатель дроби в нуль. Из условия $x^2 - 9 \neq 0$ находим: $x \neq \pm 3$. Значит, область определения функции — числовая прямая, из которой удалены две точки: 3 и –3. Это симметричное множество.

2) $f(-x) = \dfrac{(-x) - 4}{(-x)^2 - 9} = -\dfrac{x + 4}{x^2 - 9}$.

3) Сравнив $f(-x)$ и $f(x)$, замечаем, что скорее всего не выполняются ни тождество $f(-x) = f(x)$, ни тождество $f(-x) = -f(x)$. Чтобы в этом убедиться, возьмем конкретное значение x, например $x = 4$. Имеем: $f(4) = -\frac{8}{7}$, а $f(-4) = 0$. Значит, $f(-4) \neq f(4)$ и $f(-4) \neq -f(4)$.

Таким образом, функция не является ни четной, ни нечетной.

г) Функция $y = \sqrt{x - 3}$ определена при условии $x - 3 \geqslant 0$, т. е. на луче $[3; +\infty)$. Этот луч — несимметричное множество, значит, функция не является ни четной, ни нечетной. ◼

Пример 4. Исследовать на четность функцию:

а) $y = |x|$, $x \in [-2; 2]$;   в) $y = x^3$, $x \in (-5; 5)$;

б) $y = |x|$, $x \in [-3; 3)$;   г) $y = x^3$, $x \in (-5; 5]$.

Решение. а) $D(f) = [-2; 2]$ — симметричное множество, и для любого $x \in D(f)$ выполняется равенство $|-x| = |x|$. Значит, заданная функция — четная.

б) $D(f) = [-3; 3)$ — несимметричное множество. В самом деле, точка -3 принадлежит полуинтервалу $[-3; 3)$, а противоположная точка 3 не принадлежит этому полуинтервалу. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

в) $D(f) = (-5; 5)$ — симметричное множество, и $(-x)^3 = -x^3$ для любого x из интервала $(-5; 5)$. Значит, заданная функция — нечетная.

г) Функция задана на полуинтервале, который не является симметричным множеством. Значит, функция — ни четная, ни нечетная. ◼

Теперь обсудим геометрический смысл свойства четности и свойства нечетности функции.

Пусть $y = f(x)$ — четная функция, т. е. $f(-x) = f(x)$ для любого $x \in D(f)$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x; f(x))$ и $B(-x; f(-x))$. Так как $f(-x) = f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами, а ординаты одинаковы.

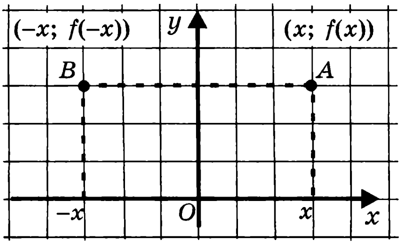


Рис. 102

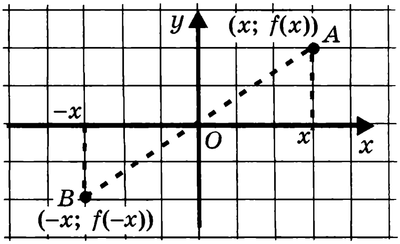


Рис. 103

Эти точки симметричны относительно оси y (рис. 102). Таким образом, для каждой точки A графика четной функции $y = f(x)$ существует симметричная ей относительно оси y точка B того же графика. Это означает, что ***график четной функции симметричен относительно оси y.***

Пусть $y = f(x)$ — нечетная функция, т. е. $f(-x) = -f(x)$ для любого $x \in D(f)$. Рассмотрим две точки графика функции: $A(x;\ f(x))$ и $B(-x;\ f(-x))$. Так как $f(-x) = -f(x)$, то у точек A и B абсциссы являются противоположными числами и ординаты являются противоположными числами. Эти точки симметричны относительно начала координат (рис. 103). Таким образом, для каждой точки A графика нечетной функции $y = f(x)$ существует симметричная ей относительно начала координат точка B того же графика. Это означает, что ***график нечетной функции симметричен относительно начала координат.***

Верны и обратные утверждения:

1. ***Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно оси ординат, то $y = f(x)$ — четная функция.***

В самом деле, симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно оси y означает, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — четная функция.

2. ***Если график функции $y = f(x)$ симметричен относительно начала координат, то $y = f(x)$ — нечетная функция.***

Симметрия графика функции $y = f(x)$ относительно начала координат означает, что для любого x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$, т. е. $y = f(x)$ — нечетная функция.

Пример 5. Исследовать на четность функцию

$$y = \sqrt{9 - x^2}.$$

Решение. Первый способ.

$f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2}$. Значит, для любого $x \in D(f)$ справедливо равенство $f(-x) = f(x)$, т. е. функция является четной.

Второй способ. Графиком функции служит полуокружность с центром в начале координат и радиусом 3 (см. рис. 78), она симметрична относительно оси y. Это означает, что $y = \sqrt{9 - x^2}$ — четная функция. ◼

§ 12. ФУНКЦИИ $y = x^n$ ($n \in N$), ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Функцию вида $y = x^n$, где $n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, называют **степенной функцией с натуральным показателем.**

Две степенные функции мы с вами уже изучили: $y = x$ (т. е. $y = x^1$) и $y = x^2$. Этим перечень наших достижений исчерпывается, ибо, начиная с $n = 3$, мы о функции $y = x^n$ пока ничего не знаем. Как выглядят графики функций $y = x^3$, $y = x^4$, $y = x^5$, $y = x^6$ и т. д.? Каковы свойства этих функций? Об этом и пойдет речь в настоящем параграфе. Правда, в § 11 одно свойство мы с вами предусмотрительно обсудили: доказали, что $y = x^4$ — четная функция, а $y = x^3$ — нечетная функция. И это, кстати, нам сейчас очень пригодится. Мы ведь знаем, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. Значит, мы можем и для функции $y = x^4$, и для функции $y = x^3$ поступить так: рассмотреть эти функции на луче $[0; +\infty)$, построить их графики (на указанном луче). Затем, используя симметрию, построить график функции на всей числовой прямой и с помощью графика перечислить свойства функции по той схеме, которую мы выработали в предыдущих параграфах (добавив свойство четности).

1. Функция $y = x^4$, $x \geqslant 0$

Составим таблицу значений для этой функции.

x	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
y	0	1	$\frac{1}{16}$	$\frac{81}{16}$

Построим точки (0; 0), (1; 1), $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{16}\right)$, $\left(\frac{3}{2}; \frac{81}{16}\right)$ на координатной плоскости (рис. 104а); они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 104б).

2. Функция $y = x^4$

Добавив к графику, изображенному на рис. 104б, линию, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = x^4$, $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 105). Он похож на параболу (но параболой его не называют).

Прежде чем перечислить свойства функции, заметим, что мы будем придерживаться того же порядка ходов, который использовали в § 10, с одной поправкой: свойству четности функции отведем вторую позицию.

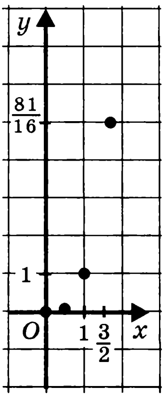


Рис. 104а

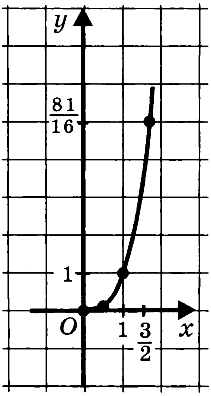


Рис. 104б

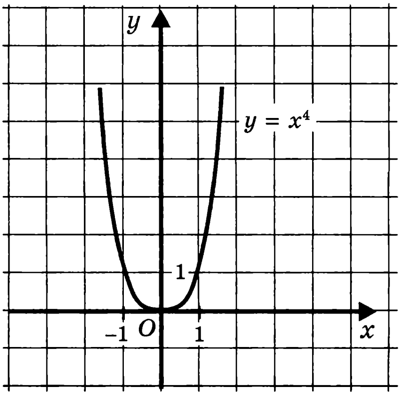


Рис. 105

Свойства функции $y = x^4$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) четная функция;
3) убывает на луче $(-\infty; 0]$, возрастает на луче $[0; +\infty)$;
4) ограничена снизу, не ограничена сверху;
5) $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует;
6) непрерывна;
7) $E(f) = [0; +\infty)$;
8) выпукла вниз.

Эти свойства мы прочитали по графику, что, конечно, не является доказательством. Обычно поступают наоборот: исследуют свойства функции, а потом, опираясь на результаты проведенного исследования, строят ее график. В состоянии ли мы с вами уже теперь действовать так, как принято в математике? Пока еще не совсем. Из перечисленных выше восьми свойств очевидно первое (поскольку любое число x можно возвести в четвертую степень). В предыдущем параграфе доказано второе свойство. Можно доказать и третье: в самом деле, если $x_1 > x_2 \geqslant 0$, то по свойству числовых неравенств $x_1^4 > x_2^4$, а это и означает возрастание функции на луче $[0; +\infty)$.

Докажем четвертое и пятое свойства. Положим $f(x) = x^4$. Ясно, что для любого x выполняется неравенство $x^4 \geqslant 0$. Это означает, что функция $y = x^4$ ограничена снизу. Предположим, что она ограничена сверху, т. е. предположим, что существует положительное число M такое, что для любого x выполняется неравенство $x^4 < M$. Возьмем натуральное число $n > M$ и рассмотрим значение функции $y = x^4$ в точке $x_0 = n$. Имеем:

$$f(x_0) = n^4 \geqslant n > M.$$

Итак, мы нашли такую точку x_0, в которой выполняется неравенство $f(x_0) > M$, что противоречит нашему предположению об ограниченности функции сверху. Значит, функция не ограничена сверху. Поскольку функция не ограничена сверху, наибольшего значения у нее нет. В то же время ясно, что $y_{\text{наим}} = 0$.

Что же не доказано, где мы вынуждены пока опираться на геометрическую интуицию? Не доказаны свойства 6, 7 и 8.

Впрочем, при желании можно дать пояснение и свойству выпуклости функции вниз. Покажем, например, что на отрезке $[0; a]$, где $a > 0$, график функции $y = x^4$ расположен ниже отрезка OA (рис. 106).

На интервале $(0; a)$ возьмем произвольную точку x_1 и восставим из этой точки перпендикуляр к оси x до пересечения с графиком функции $y = x^4$ (в точке P) и с прямой OA (в точке M) (рис. 106). Ордината точки P равна x_1^4. А чему равна ордината точки M? Выясним это.

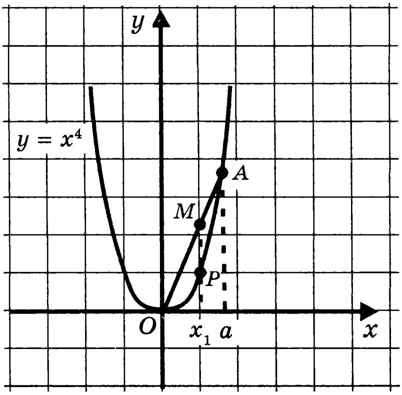


Рис. 106

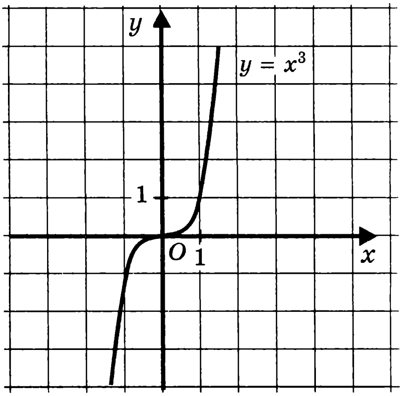


Рис. 107

Прямая OA проходит через начало координат, значит, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку $A(a;\ a^4)$. Подставив координаты точки A в уравнение $y = kx$, получим: $a^4 = ka$. Значит, $k = a^3$, т. е. уравнение прямой OA таково: $y = a^3x$. Теперь ясно, что ордината точки M равна a^3x_1.

Итак, ордината точки P равна x_1^4, а ордината точки M равна a^3x_1. Какое из этих чисел больше? Имеем: $0 < x_1 < a$, значит, по свойствам числовых неравенств $x_1^3 < a^3$ и далее $x_1^3 \cdot x_1 < a^3 \cdot x_1$, т. е. $x_1^4 < a^3x_1$. Что означает последнее неравенство? То, что точка P располагается ниже точки M. А отсюда можно сделать вывод: если провести произвольную прямую OA, то окажется, что график функции $y = x^4$ на отрезке $[0;\ a]$ лежит ниже соответствующего участка прямой OA.

3. Функция $y = x^3$

Заметим прежде всего, что $y = x^3$ — нечетная функция, следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

График функции $y = x^3$ при $x \geqslant 0$ в принципе выглядит так же, как график функции $y = x^4$ при $x \geqslant 0$ (рис. 104б), нужно лишь учесть, что новая кривая чуть менее круто идет вверх и чуть дальше отстоит от оси x около начала координат. Добавив линию, симметричную построенной относительно начала координат, получим график функции $y = x^3$ (рис. 107). Эту кривую называют **кубической параболой**.

Замечание. Между прочим, это один из редких случаев, когда математики используют не очень удачный термин. Парабола — геометрическая фигура с определенными свойствами. Линия, изображенная на рис. 107, этими свойствами не обладает, поэтому лучше было бы придумать ей другое название, без использования термина «парабола» («кубическая парабола» — это что-то вроде «квадратной окружности»). Но термин «кубическая парабола» прижился в математике, придется и нам его использовать.

Отметим некоторые геометрические особенности кубической параболы $y = x^3$. У нее есть центр симметрии — точка (0; 0), которая отделяет друг от друга две симметричные части кривой; эти симметричные части называют *ветвями кубической параболы*. Обратите внимание: когда одна ветвь кубической параболы переходит через начало координат в другую ветвь, это происходит плавно, без излома.

Свойства функции $y = x^3$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2) нечетная функция;
3) возрастает;
4) не ограничена ни снизу, ни сверху;
5) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;
6) непрерывна;
7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8) выпукла вверх на $(-\infty; 0]$, выпукла вниз на $[0; -\infty)$.

4. Функция $y = x^{2n}$

Речь идет о функциях $y = x^6$, $y = x^8$ и вообще о степенной функции с четным натуральным показателем степени. График любой такой функции похож на график функции $y = x^4$ (рис. 105), только его ветви более круто направлены вверх.

Отметим еще, что кривая $y = x^{2n}$ *касается оси x в точке* (0; 0). Геометрически это означает, что одна ветвь кривой плавно переходит в другую, как бы прижимаясь к оси x. Точное определение понятия касания будет дано в 10-м классе.

5. Функция $y = x^{2n+1}$

Речь идет о функциях $y = x^3$, $y = x^5$, $y = x^7$ и вообще о степенной функции с нечетным натуральным показателем степени (3, 5, 7, 9 и т. д.). График любой такой функции похож на график функции $y = x^3$ (рис. 107), только чем больше показатель,

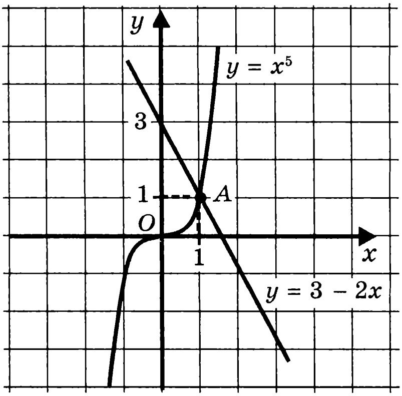


Рис. 108

тем более круто направлены вверх (и соответственно вниз) ветви графика. Отметим еще, что кривая $y = x^{2n+1}$ *касается оси x в точке* (0; 0).

Пример 1. Решить уравнение $x^5 = 3 - 2x$.

Решение. 1) Рассмотрим две функции: $y = x^5$ и $y = 3 - 2x$.

2) Построим график функции $y = x^5$ (рис. 108).

3) Построим график линейной функции $y = 3 - 2x$. Это прямая линия, проходящая через точки (0; 3) и (1; 1) (рис. 108).

4) Судя по чертежу, построенные графики пересекаются в точке $A(1;\ 1)$. Проверка показывает, что на самом деле координаты точки $A(1;\ 1)$ удовлетворяют и уравнению $y = x^5$, и уравнению $y = 3 - 2x$. Значит, уравнение имеет один корень: $x = 1$ — это абсцисса точки A.

Ответ: $x = 1$.

Между прочим, геометрическая модель, представленная на рис. 108, наглядно иллюстрирует следующее утверждение, которое иногда позволяет изящно решать довольно сложные уравнения:

Если функция $y = f(x)$ возрастает, а функция $y = g(x)$ убывает и если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень, то только один.

Докажем это утверждение. Предположим, что уравнение $f(x) = g(x)$ кроме корня x_1 имеет еще один корень x_2. Пусть $x_1 < x_2$.

Поскольку x_1 и x_2 — корни заданного уравнения, то выполняются равенства $f(x_1) = g(x_1)$ и $f(x_2) = g(x_2)$. Функция $y = f(x)$ возрастает, а потому выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$; функция $y = g(x)$ убывает, а потому выполняется неравенство $g(x_1) > g(x_2)$. Итак, $f(x_2) > f(x_1) = g(x_1) > g(x_2)$. Получилось, что $f(x_2) > g(x_2)$.

Аналогично можно доказать, что если $x_1 > x_2$, то $f(x_2) < g(x_2)$. Итак, в любом случае получается, что $f(x_2) \neq g(x_2)$, т. е. x_2 не является корнем уравнения. Значит, уравнение имеет только один корень, утверждение доказано.

Вот как, опираясь на это утверждение, мы можем без чертежа решить уравнение из примера 1:

1) заметим, что при $x = 1$ выполняется равенство

$$1^5 = 3 - 2 \cdot 1,$$

значит, $x = 1$ — корень уравнения (этот корень мы угадали);

2) функция $y = 3 - 2x$ убывает, а функция $y = x^5$ возрастает, значит, корень у заданного уравнения только один, и этим корнем является найденное выше значение $x = 1$.

В курсе алгебры 8-го класса мы говорили о том, как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить график функции $y = f(x + m) + l$. Вспомним, как это делается.

Пример 2. Построить график функции $y = (x - 1)^6 - 2$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1; -2)$ (пунктирные прямые $x = 1$ и $y = -2$ на рис. 109а).

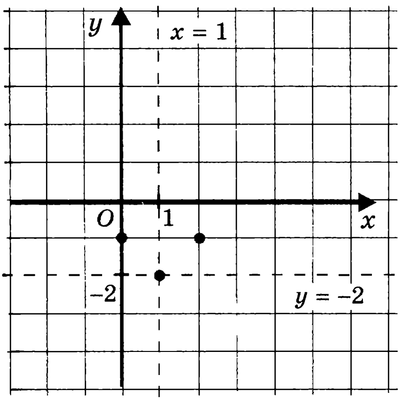


Рис. 109а

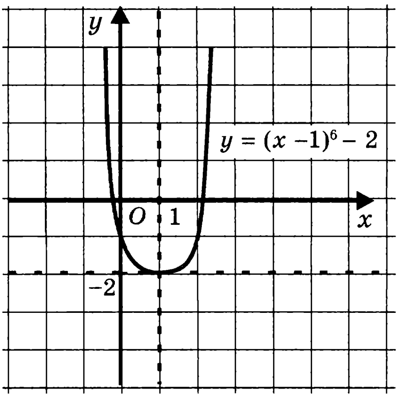


Рис. 109б

2) «Привяжем» функцию $y = x^6$ к новой системе координат. Для этого выберем контрольные точки для функции $y = x^6$: (0; 0), (1; 1), (–1; 1), но строить их будем не в старой, а в новой системе координат (эти точки отмечены на рис. 109а). Затем через контрольные точки проведем линию, похожую на ту, которая изображена на рис. 105, — это и будет требуемый график (рис. 109б). Разумеется, если называть вещи своими именами, это эскиз требуемого графика. ■

§ 13. ФУНКЦИИ $y = x^{-n}$ $(n \in N)$, ИХ СВОЙСТВА И ГРАФИКИ

Продолжаем расширять класс функций, с которыми нам нужно, образно говоря, познакомиться накоротке. В предыдущем параграфе таковыми были степенные функции с натуральным показателем $y = x^n$, а в этом параграфе мы рассмотрим функции вида $y = x^{-n}$, где n — натуральное число. Их называют **степенными функциями с отрицательным целым показателем.**

По определению степени с отрицательным показателем

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Поэтому вместо записи $y = x^{-n}$ можно использовать запись $y = \frac{1}{x^n}$.

Одну функцию такого вида мы с вами изучили в курсе алгебры 8-го класса — это была функция $y = \frac{1}{x}$. Вам известны и свойства этой функции, и ее график — гипербола (рис. 110). Сделаем следующий шаг: рассмотрим функцию $y = \frac{1}{x^2}$. Начнем с исследования функции $y = \frac{1}{x^2}$ на четность, что, видимо, вас не удивит. Вспомните, ведь и в предыдущем параграфе мы начинали с использования четности функции $y = x^4$ и нечетности функции $y = x^3$.

Итак, докажем, что $y = \frac{1}{x^2}$ — *четная функция.*

Заметим прежде всего, что область определения функции — множество всех действительных чисел, за исключением значения $x = 0$; это симметричное множество. Далее имеем: $f(x) = \frac{1}{x^2}$,

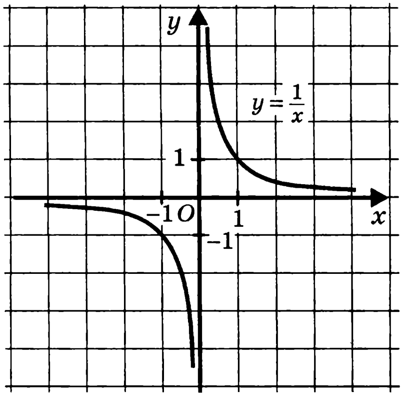


Рис. 110

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2}$; таким образом, для любого x из области определения функции выполняется равенство $f(-x) = f(x)$. Это значит, что $y = \frac{1}{x^2}$ — четная функция.

Свойство четности функции $y = \frac{1}{x^2}$ нам сейчас очень пригодится. Мы ведь знаем, что график четной функции симметричен относительно оси ординат. Значит, можно поступить так: рассмотреть эту функцию на открытом луче $(0; +\infty)$ и построить ее график на указанном луче. Затем, используя симметрию, построить график функции на всей числовой прямой и с его помощью перечислить свойства функции по той схеме, которая была использована в предыдущем параграфе.

1. Функция $y = \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

До сих пор мы строили график функции, а потом говорили о ее свойствах. На самом деле, как мы уже не раз отмечали, математики обычно сначала исследуют свойства функции в соответствии со строгими определениями этих свойств, а потом используют полученные результаты для построения графика. Вы уже приобрели некоторый опыт в исследовании функции, воспользуемся им для исследования функции $y = \frac{1}{x^2}, x > 0$. Введем привычное обозначение: $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

1. $D(f) = (0; +\infty)$. Тут обсуждать нечего.

2. Функция убывающая. В самом деле, пусть $0 < x_1 < x_2$; тогда по свойствам числовых неравенств последовательно получаем: $x_1^2 < x_2^2$; $\frac{1}{x_1^2} > \frac{1}{x_2^2}$. Итак, из $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$, а это и означает убывание функции.

3. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху. Ограниченность снизу следует из очевидного неравенства $\frac{1}{x^2} > 0$. Предположим, что функция ограничена сверху, т. е. существует положительное число M такое, что для любого $x > 0$ выполняется неравенство $\frac{1}{x^2} < M$. Пусть $x_0 = \frac{1}{\sqrt{M+1}}$. Тогда

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0^2} = 1 : \frac{1}{M+1} = M + 1 > M.$$

Итак, мы нашли точку, в которой значение функции больше числа M, вопреки нашему предположению. Значит, предположение неверно, т. е. функция не ограничена сверху.

4. У функции нет ни наименьшего, ни наибольшего значений. То, что нет наибольшего значения, вытекает из неограниченности функции сверху. А как доказать, что нет наименьшего значения, ведь снизу-то функция ограничена? Будем рассуждать так.

Предположим, что наименьшее значение существует. Это значит, что существует точка x_0 такая, что для любого $x > 0$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$. Но если взять точку $x_1 > x_0$, то, в силу убывания функции, выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_0)$, что противоречит нашему предположению. Итак, функция не имеет наименьшего значения.

Теперь построим график функции.

Составим таблицу значений для этой функции.

x	1	$\frac{1}{2}$	2	3
y	1	4	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$

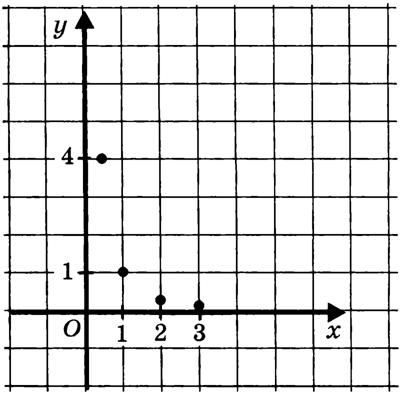


Рис. 111а

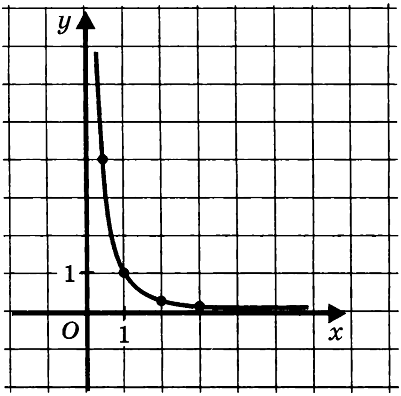


Рис. 111б

Построим точки (1; 1), $\left(\frac{1}{2}; 4\right)$, $\left(2; \frac{1}{4}\right)$, $\left(3; \frac{1}{9}\right)$ на координатной плоскости (рис. 111а), они намечают некоторую линию, проведем ее, учитывая полученные выше свойства 2, 3, 4 (рис. 111б).

2. Функция $y = x^{-2}$

Добавив к графику, изображенному на рис. 111б, ветвь, симметричную построенной относительно оси ординат, получим график функции $y = \frac{1}{x^2}$, т. е. $y = x^{-2}$ (рис. 112).

Свойства функции $y = x^{-2}$

1) $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$;

2) четная функция;

3) убывает на открытом луче $(0; +\infty)$, возрастает на открытом луче $(-\infty; 0)$;

4) ограничена снизу, не ограничена сверху;

5) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;

6) непрерывна при $x < 0$ (т. е. на открытом луче $(-\infty; 0)$) и при $x > 0$ (т. е. на открытом луче $(0; +\infty)$);

7) $E(f) = (0; +\infty)$;

8) выпукла вниз и при $x < 0$, и при $x > 0$.

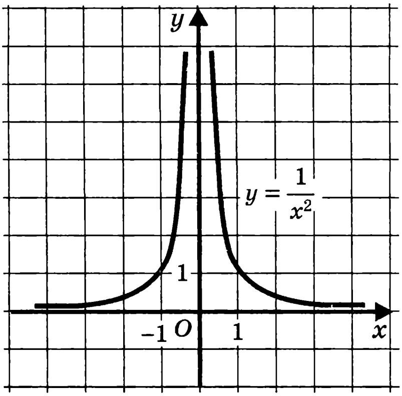


Рис. 112

3. Функция $y = x^{-2n}$

Речь идет о функциях $y = \frac{1}{x^4}$, $y = \frac{1}{x^6}$, $y = \frac{1}{x^8}$ и т. д. График любой такой функции похож на график функции $y = \frac{1}{x^2}$ (рис. 112). Отметим, что кривая $y = \frac{1}{x^{2n}}$ *асимптотически приближается к осям координат*. Говорят также, что ось x (т. е. прямая $y = 0$) является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = \frac{1}{x^{2n}}$, а ось y (т. е. прямая $x = 0$) является *вертикальной асимптотой* этого графика.

4. Функция $y = x^{-(2n+1)}$

Речь идет о функциях $y = \frac{1}{x^3}$, $y = \frac{1}{x^5}$ и т. д. График любой такой функции похож на график функции $y = \frac{1}{x}$ (рис. 110).

Отметим, что ось x является *горизонтальной асимптотой* графика функции $y = \frac{1}{x^{2n+1}}$, а ось y является *вертикальной асимптотой* этого графика.

Свойства функции $y = x^{-(2n+1)}$

1) $D(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

2) нечетная функция;

3) убывает на открытом луче $(0;\ +\infty)$ и на открытом луче $(-\infty;\ 0)$;

4) не ограничена ни снизу, ни сверху;

5) нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;

6) непрерывна при $x < 0$ и при $x > 0$;

7) $E(f) = (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$;

8) выпукла вверх при $x < 0$, выпукла вниз при $x > 0$.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = \dfrac{1}{x^2}$ на заданном промежутке:

а) $\left[\dfrac{1}{2};\ 3\right]$; б) $\left[-2;\ -\dfrac{1}{3}\right)$; в) $[1;\ +\infty)$.

Решение. а) Для удобства рассуждений введем обозначение: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$. Функция убывает при $x > 0$, значит, наименьшего и наибольшего значений она может достигать только на концах промежутка (соответственно на правом и левом), если, разумеется, эти концы принадлежат промежутку. В рассматриваемом случае

$$y_{\text{наим}} = f(3) = \frac{1}{9},\ y_{\text{наиб}} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

б) Функция возрастает при $x < 0$, значит, наименьшего и наибольшего значений она может достигать только на концах промежутка (соответственно на левом и правом), если, разумеется, эти концы принадлежат промежутку. В рассматриваемом случае $y_{\text{наим}} = f(-2) = \dfrac{1}{4}$, а $y_{\text{наиб}}$ не существует (правый конец не принадлежит заданному промежутку).

в) С помощью графика функции (рис. 112) устанавливаем, что $y_{\text{наим}}$ не существует, а $y_{\text{наиб}} = 1$. ◾

Пример 2. Построить график функции $y = (x - 1)^{-3} + 2$.

Решение. 1) Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(1;\ 2)$ (пунктирные прямые $x = 1$ и $y = 2$ на рис. 113а).

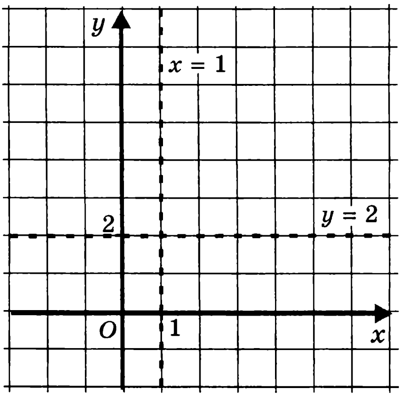


Рис. 113а

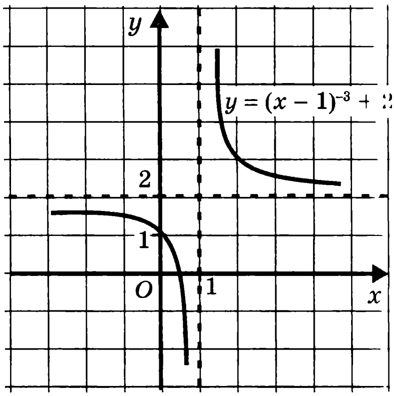


Рис. 113б

2) «Привяжем» функцию $y = x^{-3}$ к новой системе координат - это и будет требуемый график (рис. 113б). ◼

§ 14. ФУНКЦИЯ $y = \sqrt[3]{x}$, ЕЕ СВОЙСТВА И ГРАФИК

Определение 1. Число b называют **кубическим корнем (или корнем третьей степени) из числа** a, если выполняется равенство $b^3 = a$.

Пишут: $\sqrt[3]{a} = b$; a — *подкоренное число*, 3 — *показатель корня*.

Таким образом, равенства $\sqrt[3]{a} = b$, $b^3 = a$ и $(\sqrt[3]{a})^3 = a$ эквивалентны, т. е. выражают одну и ту же зависимость между действительными числами a и b. Короче это можно записать так: $\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a$; $\Leftrightarrow$ — *знак эквивалентности*.

Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, так как $3^3 = 27$; $\sqrt[3]{1} = 1$, так как $1^3 = 1$; $\sqrt[3]{0} = 0$, так как $0^3 = 0$; $\sqrt[3]{-64} = -4$, так как $(-4)^3 = -64$; $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} = \frac{3}{2}$, так как $\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3\frac{3}{8}$.

Кубический корень $\sqrt[3]{a}$ существует для любого числа a. Это утверждение доказывается в курсе высшей математики. Мы будем пользоваться им без доказательства. Результат извлечения кубического корня сравнительно редко оказывается рациональным числом. Чаще получается иррациональное число, для которого можно найти лишь приближенное значение.

Докажем, для примера, что $\sqrt[3]{5}$ — иррациональное число. Предположим противное, что $\sqrt[3]{5}$ — рациональное число, т. е. $\sqrt[3]{5} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая обыкновенная дробь. Тогда $\left(\frac{m}{n}\right)^3 = 5$, т. е. $m^3 = 5n^3$. Последнее равенство означает, что $m^3 \vdots 5$, т. е. натуральное число m^3 делится на 5 без остатка (напомним, что символ $\vdots$ означает «делится на»).

Но это возможно тогда и только тогда, когда $m \vdots 5$, т. е. $m = 5k$, где k — некоторое натуральное число. Подставим выражение $5k$ вместо m в равенство $m^3 = 5n^3$; получим: $(5k)^3 = 5n^3$, откуда $n^3 = 25k^3$. Последнее равенство означает, что $n^3 \vdots 25$ и уж тем более $n^3 \vdots 5$. Но тогда и $n \vdots 5$.

Итак, получили, что $m \vdots 5$ и $n \vdots 5$. Отсюда следует, что дробь $\frac{m}{n}$ — сократимая (ее числитель и знаменатель можно сократить на 5), а это противоречит условию, согласно которому $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь.

Полученное противоречие означает, что наше предположение о рациональности числа $\sqrt[3]{5}$ неверно, т. е. это число — иррациональное.

Корень третьей степени из положительного числа — положительное число, а корень третьей степени из отрицательного числа — отрицательное число. Это следует из того, что при возведении в куб знак числа не меняется. Справедливо тождество

$$\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}.$$

В самом деле, пусть $\sqrt[3]{-x} = b$, а $\sqrt[3]{x} = c$. Тогда $b^3 = -x$, а $c^3 = x$. Отсюда следует, что $b^3 = -c^3$, или $b^3 = (-c)^3$. Из последнего равенства следует, что $b = -c$, т. е. $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

Пример 1. Доказать, что:

а) $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$; б) $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ $(b \neq 0)$.

Решение. а) Имеем: $\left(\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{a}\right)^3 \cdot \left(\sqrt[3]{b}\right)^3 = ab$. Значит, $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$ — это число, куб которого равен ab. А таким числом является $\sqrt[3]{ab}$. Значит, $\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b}$.

б) Доказывается аналогично (сделайте это!). ■

Рассмотрим функцию $y = \sqrt[3]{x}$, отметим некоторые ее свойства и построим график. Введем привычное обозначение: $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$ (речь идет о естественной области определения функции — см. с. 87), поскольку, как мы отметили выше, кубический корень можно извлечь из любого действительного числа.

2) $y = \sqrt[3]{x}$ — нечетная функция. Это вытекает из доказанного выше тождества $\sqrt[3]{-x} = -\sqrt[3]{x}$.

3) $y = \sqrt[3]{x}$ — возрастающая функция на луче $[0; +\infty)$.

В самом деле, пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$; нам надо доказать, что тогда и $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$. Предположим противное, что $\sqrt[3]{x_1} \geqslant \sqrt[3]{x_2}$. Тогда по свойству числовых неравенств $\left(\sqrt[3]{x_1}\right)^3 \geqslant \left(\sqrt[3]{x_2}\right)^3$, т. е. $x_1 \geqslant x_2$, что противоречит условию. Значит, наше предположение неверно, а потому $\sqrt[3]{x_1} < \sqrt[3]{x_2}$.

Итак, из $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$, а это означает возрастание функции.

4) Функция $y = \sqrt[3]{x}$ не ограничена сверху на луче $[0; +\infty)$. Предположим противное: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in [0; +\infty)$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{x} < M$. Возьмем на луче $[0; +\infty)$ точку $x_0 = (M + 1)^3$. Тогда $f(x_0) = \sqrt[3]{(M+1)^3} = M + 1 > M$. Итак, мы нашли точку x_0, в которой выполняется неравенство $f(x_0) > M$. Это противоречит предположению о том, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $f(x) < M$. Значит, наше предположение неверно, т. е. функция не ограничена сверху. В то же время она ограничена снизу: на луче $[0; +\infty)$ выполняется неравенство $\sqrt[3]{x} \geqslant 0$.

5) Непосредственным следствием предыдущего свойства является следующее свойство: $y_{\text{наим}} = 0$, $y_{\text{наиб}}$ не существует.

Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ на луче $[0; +\infty)$. Составим таблицу значений.

x	0	1	8	$3\frac{3}{8}$
y	0	1	2	1,5

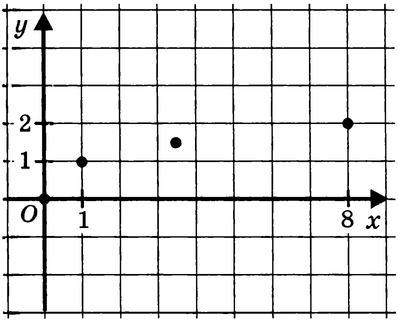


Рис. 114а

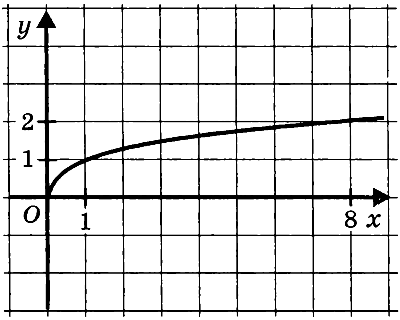


Рис. 114б

Построим точки (0; 0), (1; 1), (8; 2), $\left(3\frac{3}{8}; 1{,}5\right)$ на координатной плоскости (рис. 114а); они намечают некоторую линию, проведем ее (рис. 114б). Мы учитываем при этом и то, что функция возрастает, и то, что она не ограничена сверху.

Воспользовавшись тем, что $y = \sqrt[3]{x}$ — нечетная функция, добавим к графику, построенному на рис. 114б, ветвь, симметричную ему относительно начала координат. Тогда получим весь график функции $y = \sqrt[3]{x}$ (рис. 115).

Свойства функции $y = \sqrt[3]{x}$

1) $D(f) = (-\infty; +\infty)$;

2) $y = \sqrt[3]{x}$ — нечетная функция;

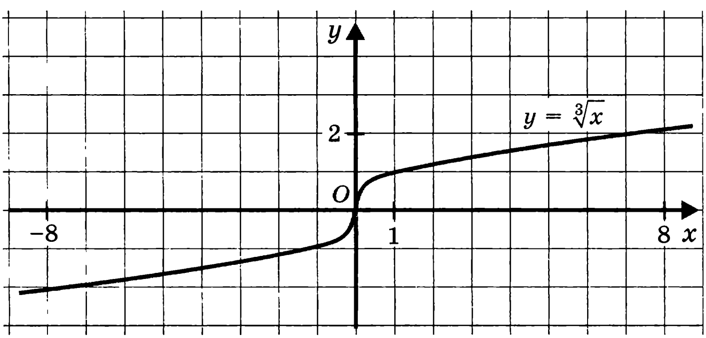


Рис. 115

3) функция $y = \sqrt[3]{x}$ возрастает на всей числовой прямой;

4) функция $y = \sqrt[3]{x}$ не ограничена ни снизу, ни сверху;

5) у функции нет ни наименьшего, ни наибольшего значений;

6) функция непрерывна на всей числовой прямой;

7) $E(f) = (-\infty; +\infty)$;

8) функция выпукла вниз на $(-\infty; 0]$ и выпукла вверх на $[0; +\infty)$.

Пример 2. Решить уравнение $\sqrt[3]{x} = 10 - x$.

Решение. Построив в одной системе координат графики функций $y = \sqrt[3]{x}$ и $y = 10 - x$ (рис. 116), убеждаемся, что они пересекаются в точке (8; 2). Так как $y = \sqrt[3]{x}$ — возрастающая функция, а $y = 10 - x$ — убывающая функция, то $x = 8$ — единственный корень заданного уравнения (см. с. 120).

Ответ: $x = 8$.

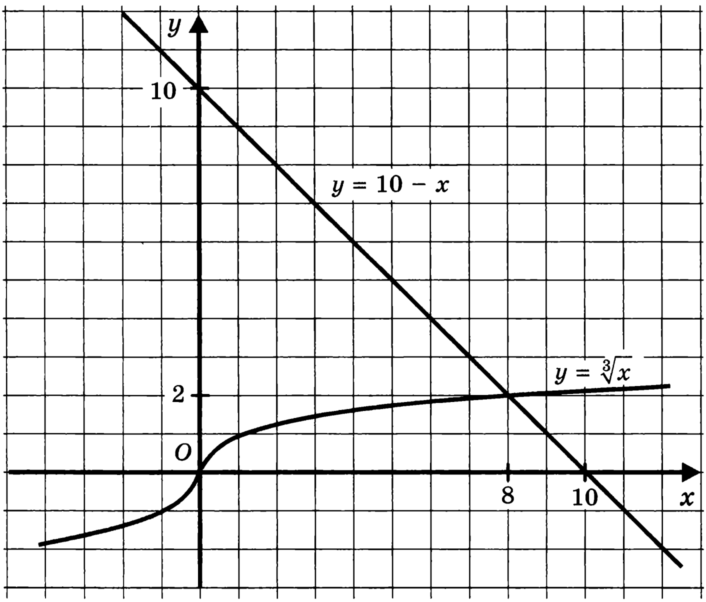


Рис. 116

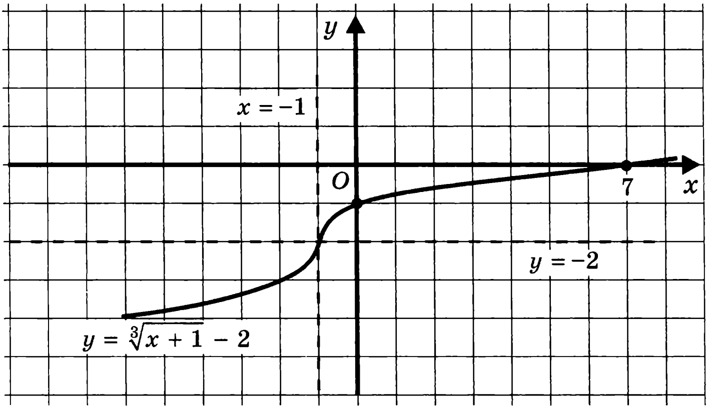


Рис. 117

П р и м е р 3. Построить график функции $y = \sqrt[3]{x+1} - 2$.

Р е ш е н и е. Перейдем к вспомогательной системе координат с началом в точке $(-1; -2)$ (пунктирные прямые $x = -1$, $y = -2$ на рис. 117) и «привяжем» функцию $y = \sqrt[3]{x}$ к новой системе координат. Получим требуемый график (см. рис. 117). ◼

П р и м е р 4. Построить и прочитать график функции

$$y = \begin{cases} -2 - x, \text{ если } x < -1, \\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x \geqslant -1. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Построим прямую $y = -2 - x$ и возьмем ее часть при $x < -1$ (рис. 118). Построим график функции $y = \sqrt[3]{x}$ и возьмем его часть при $x \geqslant -1$ (рис. 119). А теперь обе построенные линии расположим в одной системе координат (рис. 120) — это и будет требуемый график.

Прочитаем построенный график.

1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция не является ни четной, ни нечетной.
3. Убывает на $(-\infty; -1]$, возрастает на $[-1; +\infty)$.
4. Функция ограничена снизу и не ограничена сверху.
5. У функции нет наибольшего значения, а $y_{\text{наим}} = -1$.

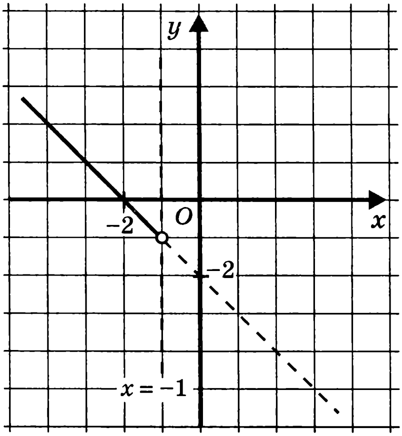


Рис. 118

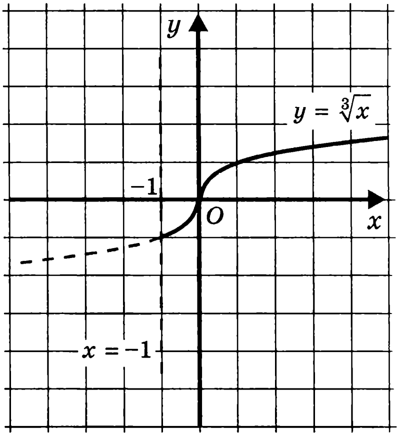


Рис. 119

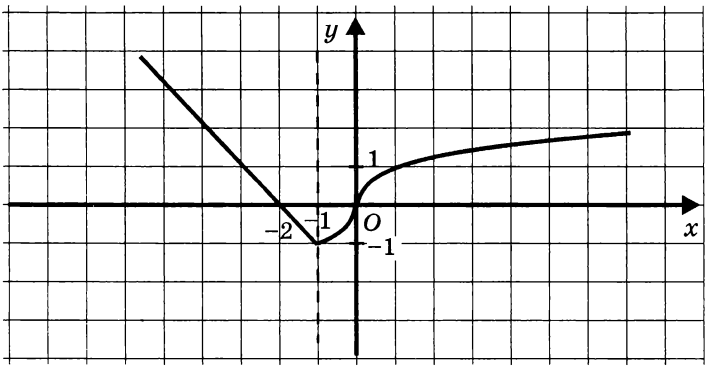


Рис. 120

6. Функция непрерывна на всей числовой прямой.
7. $E(f) = [-1; +\infty)$. ■

Завершая эту главу, упомянем еще одно свойство, которое иногда бывает полезным при исследовании функции, при построении ее графика, при решении неравенств графическим методом. Речь идет о *промежутках знакопостоянства функции*, т. е. о тех промежутках оси x, на которых функция сохраняет постоянный знак. Так, для функции, график которой изображен на рис. 120, промежутками знакопостоянства будут: открытый луч $(-\infty; -2)$ — здесь функция принимает положительные значения; $(-2; 0)$ — на этом интервале функция принимает отрицательные значения; $(0; +\infty)$ — на этом открытом луче функция принимает положительные значения.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- В этой главе мы навели относительный порядок в наших представлениях о функциях, их свойствах и графиках, которые складывались постепенно в ходе изучения алгебры в 7-м и 8-м классах.
- Мы сформулировали определения следующих понятий:
  функция, область определения, область значений функции;
  монотонность (возрастание и убывание) функции;
  ограниченность функции снизу, сверху;
  наименьшее и наибольшее значения функции;
  четность и нечетность функции.
- Вы познакомились с различными способами задания функции, такими, как:
  аналитический, графический, табличный, словесный.
- Вы узнали новые математические термины:
  четная функция, нечетная функция;
  степенная функция.
- Мы ввели новые обозначения (новые символы математического языка):
  $D(f)$ для области определения функции $y = f(x)$;
  $E(f)$ для области значений функции $y = f(x)$.
- Вы узнали новые математические модели — функции $y = x^n$, $y = x^{-n}$, где n — натуральное число, и функцию $y = \sqrt[3]{x}$; рассмотрели их свойства и графики.
- Мы обсудили геометрические особенности графика:
  возрастающей функции, убывающей функции;
  четной функции, нечетной функции;
  ограниченной снизу, ограниченной сверху функции;
  непрерывной функции;
  выпуклой вверх, выпуклой вниз функции.

ГЛАВА

4 ПРОГРЕССИИ

§ 15. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

1. Определение числовой последовательности

Рассмотрим четыре функции:

1) $y = x^2$, $x \in [0;\ 1]$; 3) $y = x^2$;

2) $y = x^2$, $x \in [0;\ +\infty)$; 4) $y = x^2$, $x \in N$.

Они заданы одной и той же формулой $y = x^2$, но области определения функций различны. В первом случае $D(f) = [0;\ 1]$. Во втором — $D(f) = [0;\ +\infty)$. В третьем — область определения функции не указана. Согласно действующей в математике договоренности подразумевается, что в этом случае $D(f)$ совпадает с областью определения выражения, задающего функцию, т. е. с областью определения выражения x^2: $D(f) = (-\infty;\ +\infty)$. Наконец, в четвертом случае областью определения функции является множество N натуральных чисел: $D(f) = N$. Графики этих функций изображены на рис. 121—124 (в различных масштабах).

Согласитесь, что первые три функции более привычны для вас, нежели четвертая. На протяжении трех лет изучения алгебры в школе мы рассматривали самые разные функции, но областью их определения практически всегда был какой-либо промежуток или объединение нескольких промежутков, а график функции состоял из одной или нескольких сплошных линий. А как обстоит дело с четвертой функцией? Ее область определения — множество натуральных чисел — состоит из отдельных точек (математики говорят: из изолированных точек); соответственно и график функции состоит из отдельных точек. Возникает вопрос: а нужно ли изучать функции, заданные на множестве натуральных чисел, встречаются ли они в реальной жизни; точнее, встречаются ли ситуации, математические модели которых представляют собой функции с областью определения N?

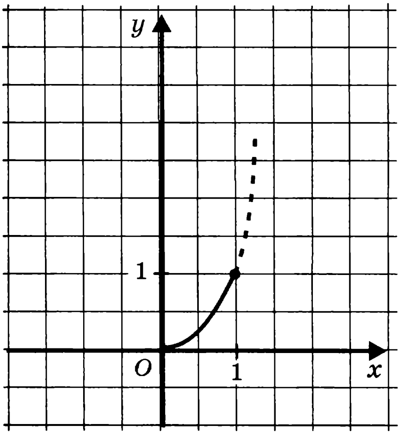


Рис. 121

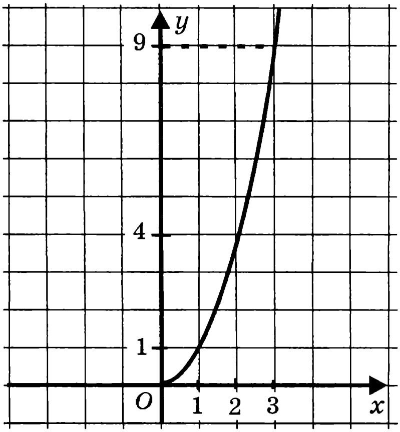


Рис. 122

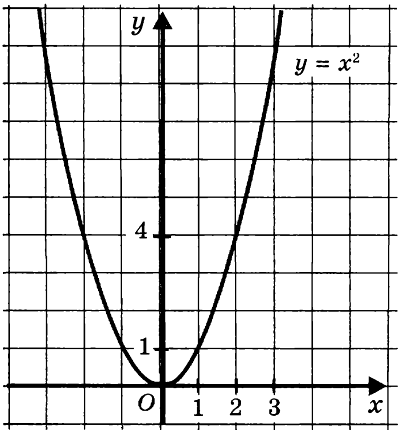


Рис. 123

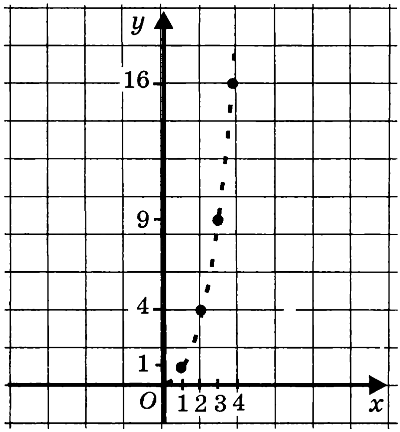


Рис. 124

Вспомним задачу из учебника «Алгебра–7». На складе имеется 500 т угля, каждый день подвозят по 30 т. Сколько угля будет на складе через день, 2 дня, 3 дня, 15 дней и т. д.? Если за x принять число дней, а за y — количество угля (в тоннах), то математической моделью ситуации будет линейная функция, заданная на множестве N натуральных чисел:

$$y = 500 + 30x, \qquad x \in N.$$

Еще пример. На банковский счет положили a р., банк ежемесячно начисляет $p\,\%$. Сколько денег на счету станет через месяц, 2 месяца, 12 месяцев и т. д.? Оказывается, математической моделью этой ситуации служит функция $y = a \cdot 2^{kx}$, $x \in N$; здесь y — сумма вклада (в рублях), x — число полных месяцев, прошедших с момента открытия счета, а k — некоторый положительный коэффициент, связанный с банковским процентом p (обычно используют приближенную формулу $k \approx 0{,}014p$).

Ответ на поставленный вопрос мы получили: функции, заданные на множестве натуральных чисел ($y = f(x)$, $x \in N$), нужно изучать.

Вместо записи $y = f(x)$, $x \in N$, обычно используют запись $y = f(n)$, договорившись раз и навсегда подразумевать в этой записи, что аргумент n — натуральное число ($n \in N$). В рассмотренных выше примерах:

вместо $y = x^2$, $x \in N$, можно записать $y = n^2$;
вместо $y = 500 + 30x$, $x \in N$, можно записать $y = 500 + 30n$;
вместо $y = a \cdot 2^{kx}$, $x \in N$, можно записать $y = a \cdot 2^{kn}$.

И еще вот о чем договорились математики: если $y = f(n)$, то вместо $f(1)$ будем писать y_1, вместо $f(2)$ — y_2, вместо $f(3)$ — y_3, вместо $f(n)$ — y_n и т. д. Значения функции $y = f(n)$ можно записать *последовательно* одно за другим: $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots$ или, в соответствии с указанной выше договоренностью, $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$. Например, для функции $y = n^2$ имеем:

$$y_1 = 1^2 = 1;$$
$$y_2 = 2^2 = 4;$$
$$y_3 = 3^2 = 9;$$
$$y_4 = 4^2 = 16 \text{ и т. д.}$$

Полученные значения можно записать *последовательно* одно за другим:

$$1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots .$$

Число 1 в этой записи находится на первом месте, 4 — на втором, 9 — на третьем, 16 — на четвертом, а n^2 — на n-м месте.

Определение 1. Функцию $y = f(x)$, $x \in N$, называют **функцией натурального аргумента** или **числовой последовательностью** и обозначают $y = f(n)$ или $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$.

Значения y_1, y_2, y_3 (и т. д.) называют соответственно *первым, вторым, третьим* (и т. д.) *членами последовательности*. В символе y_n число n называют *индексом*, который задает порядковый номер того или иного члена последовательности. Иногда для обозначения последовательности используется запись (y_n).

Многоточия в обозначении последовательности (имеется в виду запись $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$) означают, что правее y_3 располагаются дальнейшие члены последовательности (y_4, y_5, y_6 и т. д.), рядом с y_n находятся (а в случае необходимости и записываются) y_{n-1} (слева) и y_{n+1} (справа). Члену y_{n-1} предшествует y_{n-2}, а за y_{n+1} следует y_{n+2} и т. д.

Для обозначения членов последовательности могут использоваться различные буквы: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$, или $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, или $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ и т. д.

Как известно, функция может быть задана различными способами, например аналитически, графически, словесно и т. д. (см. § 9). Последовательности тоже можно задавать различными способами, среди которых особенно важны три: *аналитический, словесный* и *рекуррентный*.

2. Аналитическое задание последовательности

Говорят, что последовательность задана *аналитически*, если указана формула ее n-го члена $y_n = f(n)$.

Пример 1. $y_n = n^2$. Это аналитическое задание последовательности 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ..., о которой шла речь выше.

Указав конкретное значение n, нетрудно найти член последовательности с соответствующим номером. Если, например, $n = 9$, то $y_9 = 9^2$, т. е. $y_9 = 81$; если $n = 27$, то $y_{27} = 27^2$, т. е. $y_{27} = 729$. Напротив, если взят определенный член последовательности, можно указать его номер. Например, если $y_n = 625$, то из уравнения $n^2 = 625$ находим, что $n = 25$. Это значит, что число 625 находится на 25-м месте этой последовательности.

П р и м е р 2. $y_n = (-1)^n \frac{1}{n}$. Имеем последовательно:

$$y_1 = (-1)^1 \cdot \frac{1}{1} = -1;$$

$$y_2 = (-1)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2};$$

$$y_3 = (-1)^3 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{1}{3};$$

$$y_4 = (-1)^4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4};$$

....

Таким образом, получаем последовательность

$$-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \ldots .$$

Заметим, что эту же последовательность можно было задать аналитически в виде кусочной функции $y = f(n)$, где

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ — нечетное натуральное число;} \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n \text{ — четное натуральное число.} \end{cases}$$

Как и в предыдущем примере, нетрудно найти член последовательности с заданным номером. Например, $y_{37} = -\frac{1}{37}$, а $y_{48} = \frac{1}{48}$.

П р и м е р 3. $y_n = C$. Это значит, что речь идет о последовательности $C, C, C, \ldots, C, \ldots$, которую называют *стационарной*.

П р и м е р 4. $y_n = 2^n$. Это аналитическое задание последовательности $2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots, 2^n, \ldots$.

Как видите, зная формулу n-го члена последовательности, нетрудно найти ее первый, второй, третий члены и вообще любой член с указанным номером. Гораздо труднее, но зато и интереснее решать обратную задачу: у г а д ы в а т ь возможную формулу n-го члена последовательности, для которой указано несколько начальных членов. Приведем примеры такого угадывания. При этом приходится предполагать, что обнаруженная закономерность присуща всей последовательности.

Пример 5. 1, 3, 5, 7, 9, ...
Здесь $y_n = 2n - 1$ (последовательность нечетных чисел).

Пример 6. 2, 4, 6, 8, 10, ...
Здесь $y_n = 2n$ (последовательность четных чисел).

Пример 7. 4, 8, 12, 16, 20, ...
Здесь $y_n = 4n$.

Пример 8. 7, 11, 15, 19, 23, ...
Каждый член этой последовательности на 3 больше соответствующего члена последовательности из предыдущего примера. Значит, $y_n = 4n + 3$.

На рис. 125 изображен график последовательности $y_n = 4n + 3$, т. е. график функции $y = 4x + 3$, $x \in N$. Он состоит из точек прямой $y = 4x + 3$ с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д.

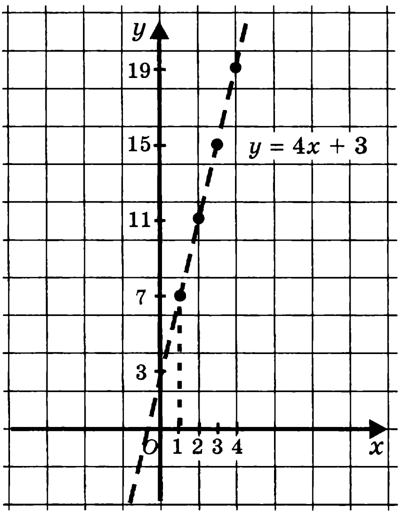


Рис. 125

Пример 9. $\frac{2}{1}, \frac{3}{4}, \frac{4}{9}, \frac{5}{16}, \frac{6}{25}, \dots$.

Здесь $y_n = \frac{n+1}{n^2}$ (проверьте!).

Пример 10. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, ...

Здесь $y_n = 2^{n-1}$.

3. Словесное задание последовательности

Суть этого способа задания последовательности поясним на примере. Известно, что $\sqrt{2}$ = 1,41421... . С этим иррациональным числом можно связать разные последовательности:

1) последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по недостатку: 1, 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, 1,41421, ...;

2) последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{2}$ по избытку: 2, 1,5, 1,42, 1,415, 1,4143, 1,41422, ...;

3) последовательность десятичных знаков числа 1,41421...:

1, 4, 1, 4, 2, 1, ...

Во всех трех случаях правило составления последовательности описано словами (не формулой).

Еще один пример — последовательность простых чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ...

Последовательность задана словесно.

Нахождение аналитического задания последовательности по ее словесному описанию часто бывает сложной (а иногда и неразрешимой) задачей.

4. Рекуррентное задание последовательности

Важный для приложений способ задания последовательности состоит в том, что указывается *правило, позволяющее вычислить n-й член последовательности, если известны ее предыдущие члены.* При вычислении членов последовательности по этому правилу мы как бы все время возвращаемся назад, выясняем, чему равны предыдущие члены. Такой способ задания последовательности называют *рекуррентным* (от лат. *recurrere* — возвращаться). Чаще всего в таких случаях указывают формулу, позволяющую выразить

n-й член последовательности через предыдущие, и задают один-два начальных члена последовательности. Приведем примеры.

Пример 11. $y_1 = 3$; $y_n = y_{n-1} + 4$, если $n = 2, 3, 4, \ldots$. Иными словами, n-й член последовательности получается из предыдущего $(n - 1)$-го члена прибавлением к нему числа 4.

Имеем:

$$y_1 = 3;$$
$$y_2 = y_1 + 4 = 3 + 4 = 7;$$
$$y_3 = y_2 + 4 = 7 + 4 = 11;$$
$$y_4 = y_3 + 4 = 11 + 4 = 15 \text{ и т. д.}$$

Тем самым получаем последовательность

$$3,\ 7,\ 11,\ 15,\ \ldots .$$

Заметим, что эту последовательность нетрудно задать аналитически: $y_n = 4n - 1$ (проверьте!).

Пример 12. $y_1 = 3$; $y_n = 2y_{n-1}$, если $n = 2, 3, 4, \ldots$. Иными словами, n-й член последовательности получается из предыдущего $(n-1)$-го члена умножением его на 2.

Имеем:

$$y_1 = 3;$$
$$y_2 = 2y_1 = 2 \cdot 3 = 6;$$
$$y_3 = 2y_2 = 2 \cdot 6 = 12;$$
$$y_4 = 2y_3 = 2 \cdot 12 = 24 \text{ и т. д.}$$

Тем самым получаем последовательность

$$3,\ 6,\ 12,\ 24,\ \ldots .$$

Заметим, что и здесь нетрудно перейти к аналитическому заданию последовательности: $y_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ (проверьте!).

Пример 13. $y_1 = 1$; $y_2 = 1$; $y_n = y_{n-2} + y_{n-1}$, если $n = 3, 4, 5, \ldots$. Иными словами, n-й член последовательности равен сумме двух предшествующих ему членов.

Имеем:

$$y_1 = 1;$$
$$y_2 = 1;$$
$$y_3 = y_1 + y_2 = 1 + 1 = 2;$$
$$y_4 = y_2 + y_3 = 1 + 2 = 3;$$
$$y_5 = y_3 + y_4 = 2 + 3 = 5;$$
$$y_6 = y_4 + y_5 = 3 + 5 = 8 \text{ и т. д.}$$

Тем самым получаем последовательность

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \ldots .$$

Эту последовательность специально изучают в математике, поскольку она обладает целым рядом интересных свойств. Ее называют *последовательностью Фибоначчи* — по имени итальянского математика XIII в. Задать последовательность Фибоначчи рекуррентно легко, а аналитически — трудно (она задается с помощью формулы Бине́: $y_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$.

Среди рекуррентно заданных последовательностей особо выделяются два наиболее простых и в то же время важных случая.

Первый случай. Указан первый член последовательности $y_1 = a$ и задано рекуррентное соотношение $y_n = y_{n-1} + d$ (a и d — числа), где $n = 2, 3, 4, \ldots$.

Второй случай. Указан первый член последовательности $y_1 = b$ и задано рекуррентное соотношение $y_n = y_{n-1} \cdot q$ (b и q — числа), где $n = 2, 3, 4, \ldots$.

В первом случае говорят, что задана *арифметическая прогрессия* (см. выше пример 11, здесь $a = 3$, $d = 4$). Во втором случае говорят, что задана *геометрическая прогрессия* (см. выше пример 12, здесь $b = 3$, $q = 2$). Подробнее о прогрессиях речь пойдет ниже, в § 16 и 17.

5. Монотонные последовательности

Числовая последовательность — частный случай числовой функции, а потому некоторые свойства функций рассматривают и для последовательностей. Мы ограничимся здесь лишь свойством монотонности (о других свойствах числовых последовательностей речь пойдет в 10-м классе в курсе «Алгебра и начала математического анализа»).

Определение 2. Последовательность (y_n) называют **возрастающей**, если каждый ее член (кроме первого) больше предыдущего:

$$y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \ldots < y_n < y_{n+1} < \ldots .$$

Определение 3. Последовательность (y_n) называют **убывающей**, если каждый ее член (кроме первого) меньше предыдущего:

$$y_1 > y_2 > y_3 > y_4 > \ldots > y_n > y_{n+1} > \ldots .$$

Возрастающие и убывающие последовательности объединяют общим термином — **монотонные последовательности.**

Пример 14. 1, 3, 5, 7, ..., $2n - 1$, ...

Это возрастающая последовательность.

Пример 15. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Это убывающая последовательность.

Пример 16. $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, (-1)^{n-1}, \frac{1}{n}, \ldots$.

Эта последовательность не является ни возрастающей, ни убывающей (немонотонная последовательность).

Пример 17. $y_n = 2^n$.

Речь идет о последовательности 2, 4, 8, 16, 32, ... Это возрастающая последовательность.

Вообще, *если* $a > 1$, *то последовательность* $y_n = a^n$ *возрастает.*

Пример 18. $y_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Речь идет о последовательности $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$. Это убывающая последовательность.

Вообще, *если* $0 < a < 1$, *то последовательность* $y_n = a^n$ *убывает.*

§ 16. АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

1. Основные понятия

Определение. Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа d, называют **арифметической прогрессией**. При этом число d называют **разностью** прогрессии.

Таким образом, арифметическая прогрессия — это числовая последовательность (a_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$\boxed{\begin{gathered} a_1 = a, \quad a_n = a_{n-1} + d \\ (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{gathered}}$$

(a и d — заданные числа).

Можно ли, глядя на числовую последовательность, определить, является ли она арифметической прогрессией? Можно. Если вы убедились в том, что разность между любым членом последовательности и предшествующим ему членом постоянна (т. е. $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \ldots$), то перед вами — арифметическая прогрессия. Разумеется, при этом предполагается, что обнаруженная закономерность справедлива не только для явно выписанных членов последовательности, но и для всей последовательности в целом.

Пример 1. 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$.

Пример 2. 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, ...
Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 20$, $d = -3$.

Пример 3. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ...
Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 8$, $d = 0$.

Очевидно, что *арифметическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если* $d > 0$ (см. пример 1), *и убывающей, если* $d < 0$ (см. пример 2).

Для обозначения того, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией, иногда бывает удобна следующая запись:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Значок $\div$ заменяет словосочетание «арифметическая прогрессия».

Если в арифметической прогрессии отбросить все члены, следующие за каким-то конкретным членом последовательности, например за a_n, то получится *конечная арифметическая прогрессия*

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

Иногда в конечной арифметической прогрессии удобно записывать не только несколько членов в начале, но и несколько членов в конце, например так:

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

В дальнейших пунктах этого параграфа рассмотрим наиболее важные свойства арифметической прогрессии.

2. Формула n-го члена арифметической прогрессии

Способ задания арифметической прогрессии, о котором идет речь в определении, является рекуррентным. Во многих случаях он неудобен: чтобы вычислить, например, a_{100}, надо предварительно найти предшествующие 99 членов последовательности. Эту вычислительную работу можно существенно упростить, если удастся найти формулу n-го члена, т. е. перейти к аналитическому заданию арифметической прогрессии.

Рассмотрим арифметическую прогрессию $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ с разностью d. Имеем:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1,\\
&a_2 = a_1 + d,\\
&a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,\\
&a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d,\\
&a_5 = a_4 + d = (a_1 + 3d) + d = a_1 + 4d \text{ и т. д.}
\end{aligned}$$

Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)d.} \qquad (1)$$

Это *формула n-го члена арифметической прогрессии.*

Важное замечание. «Нетрудно догадаться», «можно сообразить» и т. д. — это стилистические обороты из области интуиции, догадки, озарения. Разумеется, математики ими пользуются, но в основном для открытия каких-то новых фактов, а не для их обоснования. Формулу (1) мы «прочувствовали», но не обосновали. Приведем (для интересующихся) доказательство.

Если $n = 1$, то $a_1 = a_1 + (1 - 1)d$ — верное равенство, т. е. формула (1) для $n = 1$ верна.

Предположим, что формула (1) верна для натурального числа $n = k$, т. е. предположим, что верно равенство $a_k = a_1 + (k - 1)d$. Докажем, что тогда формула (1) верна и для следующего натурального числа $n = k + 1$, т. е. докажем, что $a_{k+1} = a_1 + kd$.

В самом деле, по определению арифметической прогрессии $a_{k+1} = a_k + d$. Далее имеем:

$$a_{k+1} = a_k + d = (a_1 + (k-1)d) + d = a_1 + kd.$$

А теперь смотрите: для $n = 1$ формула (1) верна (это мы проверили). Далее мы доказали, что если формула (1) верна для $n = k$, то она верна и для $n = k + 1$. Воспользуемся этим: формула (1) верна для $n = 1$, значит, она верна и для $n = 2$; так как она верна для $n = 2$, то она верна и для $n = 3$ и т. д. Значит, формула (1) верна для любого натурального числа n.

Приведенный метод рассуждений носит название *«метод математической индукции»*.

Перепишем формулу n-го члена арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n - 1)d$ в виде $a_n = dn + (a_1 - d)$ и введем обозначения: $a_n = y$, $a_1 - d = m$. Получим: $y = dn + m$, или, подробнее,

$$y = dx + m,\ x \in N.$$

Значит, арифметическую прогрессию можно рассматривать как *линейную функцию* ($y = dx + m$), *заданную на множестве N натуральных чисел*. Угловой коэффициент этой линейной функции равен d — разности арифметической прогрессии. На рис. 126 схематически изображен график арифметической прогрессии (для случая, когда $d > 0$) — изолированные точки на прямой с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д.

Вернемся к примерам 1 и 2, рассмотренным выше.

1) 1, 3, 5, 7, 9, 11, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 1$, $d = 2$. Составим формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$a_n = 1 + (n - 1)\cdot 2;$$
$$a_n = 2n - 1.$$

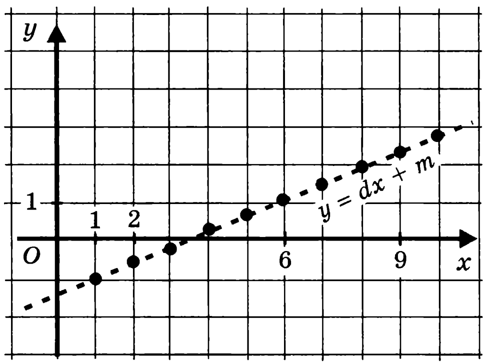


Рис. 126

(Заметим, что эту формулу нетрудно было угадать, глядя на заданную последовательность нечетных чисел 1, 3, 5, 7, ...)

2) 20, 17, 14, 11, 8, 5, 2, –1, –4, ... Это арифметическая прогрессия, у которой $a_1 = 20$, $d = -3$. Составим формулу n-го члена:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$a_n = 20 + (n - 1)\cdot(-3);$$
$$a_n = 23 - 3n.$$

Пример 4. Дана арифметическая прогрессия

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots\ .$$

а) Известно, что $a_1 = 5$, $d = 4$. Найти a_{22}.
б) Известно, что $a_1 = -2$, $d = 3$, $a_n = 118$. Найти n.
в) Известно, что $d = -2$, $a_{39} = 83$. Найти a_1.
г) Известно, что $a_1 = 7$, $a_{15} = -35$. Найти d.

Решение. Во всех случаях в основе решения лежит формула n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

а) $a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21\cdot 4 = 89.$

б) $a_n = a_1 + (n - 1)d;$
$118 = -2 + (n - 1)\cdot 3;$
$118 = 3n - 5;$
$n = 41.$

в) $a_{39} = a_1 + 38d;$
$83 = a_1 + 38\cdot(-2);$
$a_1 = 159.$

г) $a_{15} = a_1 + 14d;$
$-35 = 7 + 14d;$
$14d = -42;$
$d = -3.$

Ответ: а) $a_{22} = 89$; б) $n = 41$; в) $a_1 = 159$; г) $d = -3$.

Пример 5. При делении девятого члена арифметической прогрессии на второй ее член в частном получается 7; при делении десятого члена прогрессии на ее пятый член в частном получается 2 и в остатке 5. Найти двадцатый член этой прогрессии.

Р е ш е н и е. Первый этап. *Составление математической модели.*

Условия задачи можно кратко записать так:

1) $\div\ a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$;

2) $a_9 = 7a_2$;

3) $a_{10} = 2a_5 + 5$.

Воспользовавшись (несколько раз) формулой n-го члена арифметической прогрессии, получим:

$$a_9 = a_1 + 8d,$$
$$a_2 = a_1 + d,$$
$$a_{10} = a_1 + 9d,$$
$$a_5 = a_1 + 4d.$$

Тогда второе условие задачи ($a_9 = 7a_2$) можно записать в виде

$$a_1 + 8d = 7(a_1 + d),$$

т. е.

$$d = 6a_1.$$

Третье условие задачи ($a_{10} = 2a_5 + 5$) можно записать в виде

$$a_1 + 9d = 2(a_1 + 4d) + 5,$$

т. е.

$$d = a_1 + 5.$$

В итоге получаем очень простую систему двух линейных уравнений с двумя переменными a_1 и d:

$$\begin{cases} d = 6a_1, \\ d = a_1 + 5, \end{cases}$$

которая в сочетании с записанным выше условием 1) и представляет собой математическую модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Решив систему, получим: $a_1 = 1$, $d = 6$.

Теперь мы можем записать арифметическую прогрессию

$$1, 7, 13, 19, 25, 31, \ldots .$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Требуется вычислить a_{20}. Имеем: $a_{20} = a_1 + 19d = 1 + 19 \cdot 6 = 115$.

О т в е т: $a_{20} = 115$.

Замечание. В рассмотренном примере речь шла о конкретной математической модели — арифметической прогрессии. Первый этап решения мы назвали, как обычно, «составление математической модели». Получается, что мы составили математическую модель для математической модели. Как это понимать? Дело в том, что при решении задач очень часто приходится заменять одну математическую модель другой, более простой. Так обстоит дело и в рассмотренной задаче: математическую модель, оформленную в виде условий 1), 2) и 3), нам удалось заменить более привычной моделью — системой уравнений.

3. Формула суммы членов конечной арифметической прогрессии

Пусть дана конечная арифметическая прогрессия

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n.$$

Обозначим через S_n сумму ее членов:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n.$$

Рассмотрим конкретный пример отыскания S_n. Дана конечная арифметическая прогрессия 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100. Сумму ее членов вычислим следующим образом:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 =$$

$$= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (50 + 51) =$$

$$= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101}_{\text{50 слагаемых}} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Примерно та же идея используется для вычисления суммы членов произвольной конечной арифметической прогрессии.

Для начала заметим, что

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n.$$

В самом деле, по определению арифметической прогрессии $a_2 = a_1 + d$, $a_{n-1} = a_n - d$. Значит,

$$a_2 + a_{n-1} = (a_1 + d) + (a_n - d) = a_1 + a_n.$$

Аналогично можно установить, что

$$a_3 + a_{n-2} = a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n$$

и вообще *сумма члена, находящегося на k-м месте от начала конечной арифметической прогрессии, и члена, находящегося на k-м месте от ее конца, равна сумме первого и последнего членов прогрессии:* $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$.

Теперь вычислим S_n. Имеем:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Сложив эти два равенства, получим:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

В правой части равенства n пар слагаемых, каждая пара, как мы установили выше, равна $a_1 + a_n$. Значит,

$$2S_n = n(a_1 + a_n);$$

$$\boxed{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}.}$$

Это *формула суммы первых n членов арифметической прогрессии.*

Пример 6. Дана конечная арифметическая прогрессия

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n.$$

а) Известно, что $a_1 = 5$, $d = 4$, $n = 22$. Найти S_n, т. е. S_{22}.

б) Известно, что $a_1 = 7$, $n = 8$, $S_8 = 140$. Найти d.

Решение. а) Имеем: $a_{22} = a_1 + 21d = 5 + 21 \cdot 4 = 89$.

Значит, $S_{22} = \dfrac{22(a_1 + a_{22})}{2} = 11 \cdot (5 + 89) = 1034.$

б) Сначала найдем a_8. Имеем:

$$S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2};$$
$$140 = 4(a_1 + a_8);$$
$$140 = 4(7 + a_8);$$
$$35 = 7 + a_8;$$
$$a_8 = 28.$$

А теперь применим к a_8 формулу n-го члена арифметической прогрессии:

$$a_8 = a_1 + 7d;$$
$$28 = 7 + 7d;$$
$$d = 3.$$

О т в е т: а) $S_{22} = 1034$; б) $d = 3$.

П р и м е р 7. Найти сумму всех четных трехзначных чисел.

Р е ш е н и е. Речь идет о сумме членов конечной арифметической прогрессии 100, 102, 104, ..., 998. У этой прогрессии $a_1 = 100$, $a_n = 998$, $d = 2$. Нужно вычислить S_n, но для этого сначала надо узнать, чему равно n, т. е. сколько членов содержится в указанной конечной арифметической прогрессии.

Имеем последовательно:

$$a_n = a_1 + (n - 1)d;$$
$$998 = 100 + (n - 1)\cdot 2;$$
$$998 = 2n + 98;$$
$$n = 450.$$

Итак, $a_1 = 100$, $n = 450$, $a_n = 998$. Наша задача — вычислить S_n, т. е. S_{450}. Имеем:

$$S_{450} = \frac{450(a_1 + a_{450})}{2} = 225\cdot(100 + 998) = 247\,050.$$ ◼

Иногда оказывается полезной несколько видоизмененная формула суммы n членов арифметической прогрессии. Если в формуле для S_n учесть, что $a_n = a_1 + d(n - 1)$, то получим:

$$\boxed{S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.}$$

Преимущество этой формулы состоит в том, что S_n можно вычислить, зная a_1 и d и не вычисляя a_n.

П р и м е р 8. Турист, двигаясь по сильно пересеченной местности, за первый час пути прошел 800 м, а за каждый следующий час проходил на 25 м меньше, чем за предыдущий. Сколько времени он потратил на весь путь, равный 5700 м?

Р е ш е н и е. Первый этап. *Составление математической модели.*

За первый час турист прошел 800 м, за второй — 775 м, за третий — 750 м и т. д. Математической моделью является конечная арифметическая прогрессия

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n,$$

у которой $a_1 = 800$, $d = -25$, $S_n = 5700$. Надо найти n — время движения туриста (в часах).

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Воспользуемся второй формулой для S_n:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$5700 = \frac{2 \cdot 800 - 25(n-1)}{2} \cdot n;$$

$$228 = \frac{64 - (n-1)}{2} \cdot n$$

(обе части уравнения разделили на 25);

$$456 = n(65 - n);$$

$$n^2 - 65n + 456 = 0;$$

$$n_1 = 8,\ n_2 = 57.$$

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Спрашивается, сколько времени был в пути турист. По смыслу задачи из двух найденных значений n выбираем первое: $n = 8$. Проверяйте: $800 + 775 + 750 + 725 + 700 + 675 + 650 + 625 = 5700$.

О т в е т: турист был в пути 8 часов.

4. Характеристическое свойство арифметической прогрессии

Пусть дана арифметическая прогрессия $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Рассмотрим три ее члена, следующие друг за другом: a_{n-1}, a_n, a_{n+1}. Известно, что

$$a_n - d = a_{n-1},$$
$$a_n + d = a_{n+1}.$$

Сложив эти равенства, получим:

$$\boxed{a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.}$$

Это значит, что каждый член арифметической прогрессии, кроме первого (и последнего — в случае конечной прогрессии), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов.

Верно и обратное: если последовательность (a_n) такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2},$$

то (a_n) — арифметическая прогрессия.

В самом деле, последнее равенство можно переписать в виде

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Это значит, в частности, что $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$, $a_3 - a_2 = a_4 - a_3$ и т. д. Иными словами, разность между любым членом последовательности и предшествующим ему всегда одна и та же, а это и означает, что задана арифметическая прогрессия.

Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема

Числовая последовательность является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда каждый ее член, кроме первого (и последнего — в случае конечной последовательности), равен среднему арифметическому предшествующего и последующего членов *(характеристическое свойство арифметической прогрессии).*

Пример 9. При каком значении x числа $3x + 2$, $5x - 4$ и $11x + 12$ образуют конечную арифметическую прогрессию?

Р е ш е н и е. Согласно характеристическому свойству заданные выражения должны удовлетворять соотношению

$$5x - 4 = \frac{(3x + 2) + (11x + 12)}{2}.$$

Решая это уравнение, находим:

$$10x - 8 = 14x + 14;$$
$$x = -5{,}5.$$

При этом значении x заданные выражения $3x + 2$, $5x - 4$, $11x + 12$ принимают соответственно значения $-14{,}5$, $-31{,}5$, $-48{,}5$. Это арифметическая прогрессия, ее разность равна -17.

О т в е т: $x = -5{,}5$.

§ 17. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ПРОГРЕССИЯ

Для удобства читателя этот параграф строится точно по тому же плану, которого мы придерживались в предыдущем параграфе.

1. Основные понятия

Определение. Числовую последовательность, все члены которой отличны от нуля и каждый член которой, начиная со второго, получается из предыдущего члена умножением его на одно и то же число q, называют **геометрической прогрессией.** При этом число q называют **знаменателем** прогрессии.

Таким образом, геометрическая прогрессия — это числовая последовательность (b_n), заданная рекуррентно соотношениями:

$$\boxed{\begin{gathered} b_1 = b, \quad b_n = b_{n-1} \cdot q \\ (n = 2, 3, 4, \ldots) \end{gathered}}$$

(b и q — заданные числа, $b \neq 0$, $q \neq 0$).

Можно ли, глядя на числовую последовательность, определить, является ли она геометрической прогрессией? Можно. Если вы убедились в том, что отношение любого члена последовательности к предыдущему члену постоянно (т. е. $b_2 : b_1 = b_3 : b_2 = b_4 : b_3 = \ldots$), то перед вами — геометрическая прогрессия.

Пример 1. 1, 3, 9, 27, 81, ...

Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 1$, $q = 3$.

Пример 2. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{16}, \ldots$.

Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$.

Пример 3. $5, -1, \frac{1}{5}, -\frac{1}{25}, \frac{1}{125}, -\frac{1}{625}, \ldots$.

Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$.

Пример 4. 8, 8, 8, 8, 8, 8, ...

Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 8$, $q = 1$.

Заметим, что эта последовательность является и арифметической прогрессией (см. пример 3 из § 16).

Пример 5. 2, –2, 2, –2, 2, –2, ...

Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 2$, $q = -1$.

Очевидно, что *геометрическая прогрессия является возрастающей последовательностью, если* $b_1 > 0$, $q > 1$ (см. пример 1), *и убывающей, если* $b_1 > 0$, $0 < q < 1$ (см. пример 2).

Для обозначения того, что последовательность (b_n) является геометрической прогрессией, иногда бывает удобна следующая запись:

$$\div\!\!\div\; b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots .$$

Значок $\div\!\!\div$ заменяет словосочетание «геометрическая прогрессия».

Отметим одно любопытное свойство геометрической прогрессии.

Если последовательность

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$$

является геометрической прогрессией, то и последовательность квадратов, т. е.

$$b_1^2, b_2^2, b_3^2, \ldots, b_n^2, \ldots,$$

является геометрической прогрессией.

У второй геометрической прогрессии первый член равен b_1^2, а знаменатель равен q^2.

Если в геометрической прогрессии отбросить все члены, следующие за b_n, то получится *конечная геометрическая прогрессия*

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$$

В дальнейших пунктах этого параграфа мы рассмотрим наиболее важные свойства геометрической прогрессии.

2. Формула *n*-го члена геометрической прогрессии

Рассмотрим геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ со знаменателем q. Имеем:

$$\begin{aligned} &b_1 = b_1, \\ &b_2 = b_1q, \\ &b_3 = b_2q = (b_1q)q = b_1q^2, \\ &b_4 = b_3q = (b_1q^2)q = b_1q^3, \\ &b_5 = b_4q = (b_1q^3)q = b_1q^4 \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Нетрудно догадаться, что для любого номера n справедливо равенство

$$\boxed{b_n = b_1q^{n-1}.} \qquad (1)$$

Это *формула n-го члена геометрической прогрессии.*

Замечание. Если вы прочли важное замечание из предыдущего параграфа и поняли его, то попробуйте доказать формулу (1) методом математической индукции, подобно тому как это было сделано для формулы *n*-го члена арифметической прогрессии.

Перепишем формулу n-го члена геометрической прогрессии $b_n = b_1q^{n-1}$ в виде

$$b_n = \frac{b_1}{q} \cdot q^n$$

и введем обозначения: $b_n = y$, $\frac{b_1}{q} = m$. Получим: $y = mq^n$, или, подробнее,

$$y = mq^x, \quad x \in N.$$

Аргумент x содержится в показателе степени, поэтому такую функцию называют *показательной*. Значит, геометрическую прогрессию можно рассматривать как *показательную функцию, заданную на множестве N натуральных чисел*. На рис. 127а изображен график функции $y = 2^x$, $x \in N$, а на рис. 127б — график

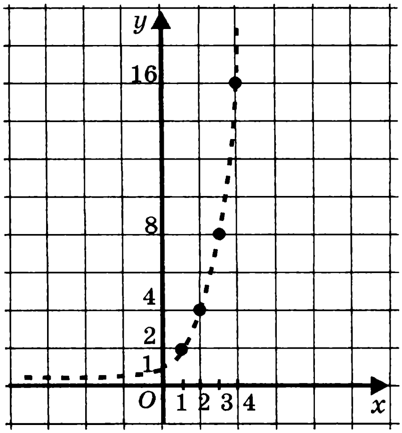


Рис. 127а

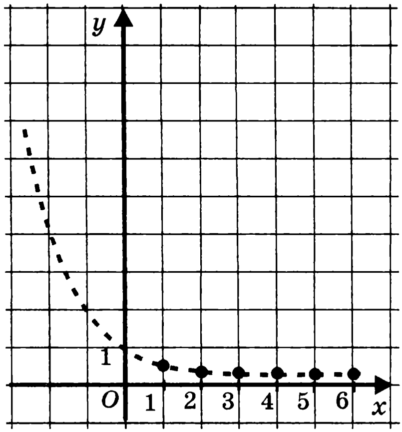


Рис. 127б

функции $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $x \in N$. В обоих случаях имеем изолированные точки (с абсциссами $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$ и т. д.), лежащие на некоторой кривой (на обоих рисунках представлена одна и та же кривая, только по-разному расположенная и изображенная в разных масштабах). Эту кривую называют *экспонентой* (заметим в скобках, что этот термин нам уже встречался — см. конец § 9). Подробнее о показательной функции и ее графике речь пойдет в курсе алгебры и начал математического анализа в 11-м классе.

Вернемся к примерам 1—5 из предыдущего пункта.

1) 1, 3, 9, 27, 81, ... Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 1$, $q = 3$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 1 \cdot 3^{n-1}, \text{ т. е. } b_n = 3^{n-1}.$$

2) 3, $\frac{3}{2}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{3}{16}$, ... Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 3$, $q = \frac{1}{2}$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

3) $5,\ -1,\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{25},\ \frac{1}{125},\ -\frac{1}{625},\ \ldots$. Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 5$, $q = -\frac{1}{5}$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}.$$

4) 8, 8, 8, ..., 8, ... Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 8$, $q = 1$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 8 \cdot 1^{n-1}, \quad \text{т. е.} \quad b_n = 8$$

(что, впрочем, было ясно с самого начала).

5) 2, –2, 2, –2, 2, –2, ... Это геометрическая прогрессия, у которой $b_1 = 2$, $q = -1$. Составим формулу n-го члена:

$$b_n = 2 \cdot (-1)^{n-1}.$$

Пример 6. Дана геометрическая прогрессия

$$b_1,\ b_2,\ b_3,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots .$$

а) Известно, что $b_1 = \frac{2}{3}$, $q = -3$. Найти b_6.

б) Известно, что $b_1 = 3$, $q = 2$, $b_n = 1536$. Найти n.

в) Известно, что $q = -2$, $b_7 = -512$. Найти b_1.

г) Известно, что $b_1 = 14$, $b_7 = \frac{7}{32}$. Найти q.

Решение. Во всех случаях в основе решения лежит формула n-го члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

а) $b_6 = b_1 q^5 = \frac{2}{3} \cdot (-3)^5 = -162.$

б) $b_n = b_1 q^{n-1};$

$1536 = 3 \cdot 2^{n-1};$

$512 = 2^{n-1}.$

Так как $512 = 2^9$, то получаем: $n - 1 = 9$; $n = 10$.

в) $b_7 = b_1 \cdot q^6;$

$-512 = b_1 \cdot (-2)^6;$

$b_1 = -8.$

г) $b_7 = b_1 \cdot q^6$;

$\frac{7}{32} = 14 \cdot q^6$;

$q^6 = \frac{1}{64}$;

$q = \frac{1}{2}$ или $q = -\frac{1}{2}$. ◼

Пример 7. Указать в заданной геометрической прогрессии номера тех членов, которые больше заданного числа A:

а) $1, 3, 9, 27, \ldots; A = 729$;

б) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}, \ldots; A = \frac{3}{64}$;

в) $b_n = 100\left(\frac{1}{5}\right)^n; A = \frac{1}{2}$;

г) $b_1 = \frac{1}{3},\ q = \sqrt{2};\ A = 51\sqrt{2}$.

Решение. а) Здесь $b_1 = 1$, $q = 3$, $b_n = b_1q^{n-1} = 3^{n-1}$. Нам нужно указать такие номера n, для которых выполняется неравенство $3^{n-1} > 729$. Замечаем, что $3^6 = 729$, т. е. при $n = 7$ $3^{n-1} = 729$. Поскольку заданная прогрессия — возрастающая, при $n > 7$ ее члены будут больше 729.

б) Здесь $b_1 = \frac{3}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, $b_n = b_1q^{n-1} = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

Нам нужно указать такие номера n, для которых выполняется неравенство $\frac{3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{3}{64}$, т. е. $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} > \frac{1}{32}$. Замечаем, что $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$, т. е. при $n = 6$ имеет место равенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{32}$. Поскольку заданная прогрессия — убывающая, при $n < 6$ ее члены будут больше $\frac{3}{64}$.

в) Речь идет о натуральных решениях неравенства $100 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n > \frac{1}{2}$, т. е. $\left(\frac{1}{5}\right)^n > \frac{1}{200}$.

Выпишем несколько начальных членов последовательности $x_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$:

$$\frac{1}{5}, \frac{1}{25}, \frac{1}{125}, \frac{1}{625}, \frac{1}{3125}, \ldots .$$

Ясно, что лишь первые три члена этой последовательности больше $\frac{1}{200}$.

г) Здесь $b_1 = \frac{1}{3}$, $q = \sqrt{2}$, $b_n = \frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$.

Нам нужно указать такие номера n, для которых выполняется неравенство $\frac{1}{3} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{n-1} > 5\sqrt{2}$.

Последовательно получаем:

$$\left(\sqrt{2}\right)^{n-1} > 15\sqrt{2};$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{\sqrt{2}} > 15\sqrt{2};$$

$$\left(\sqrt{2}\right)^n > 30.$$

Замечаем, что $\left(\sqrt{2}\right)^{10} = \left(\left(\sqrt{2}\right)^2\right)^5 = 2^5 = 32$, значит, при $n = 10$ выполняется неравенство $\left(\sqrt{2}\right)^n > 30$. Тем более оно выполняется при $n > 10$. Если взять $n = 9$, то $\left(\sqrt{2}\right)^9 = \sqrt{2^9} = 2^4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$. Так как $\sqrt{2} < 1{,}5$, то $16\sqrt{2} < 16 \cdot 1{,}5$, т. е. $16\sqrt{2} < 24$, и уж тем более $16\sqrt{2} < 32$. Это значит, что при $n = 9$ неравенство $\left(\sqrt{2}\right)^n > 30$ не выполняется. Тем более оно не выполняется при $n < 9$.

О т в е т: а) $n > 7$; б) $n < 6$; в) $n = 1, 2, 3$; г) $n \geqslant 10$.

П р и м е р 8. Разность между седьмым и пятым членами геометрической прогрессии равна 48, сумма пятого и шестого членов прогрессии также равна 48. Найти двенадцатый член этой прогрессии.

Р е ш е н и е. Первый этап. *Составление математической модели.*

Условия задачи можно кратко записать так:

1) $\div\div b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$;

2) $b_7 - b_5 = 48$;

3) $b_5 + b_6 = 48$.

Воспользовавшись формулой n-го члена геометрической прогрессии, получим:

$$b_7 = b_1q^6, \quad b_5 = b_1q^4, \quad b_6 = b_1q^5.$$

Тогда второе условие задачи ($b_7 - b_5 = 48$) можно записать так:

$$b_1q^6 - b_1q^4 = 48;$$

$$b_1q^4(q^2 - 1) = 48.$$

Третье условие задачи ($b_5 + b_6 = 48$) можно записать так:

$$b_1q^4 + b_1q^5 = 48;$$

$$b_1q^4(q + 1) = 48.$$

В итоге получаем систему двух уравнений с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1q^4(q^2 - 1) = 48, \\ b_1q^4(q + 1) = 48, \end{cases}$$

которая в сочетании с записанным выше условием 1) и представляет собой математическую модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Приравняв левые части обоих уравнений системы, получим:

$$b_1q^4(q^2 - 1) = b_1q^4(q + 1);$$

$$q^2 - 1 = q + 1$$

(мы разделили обе части уравнения на выражение b_1q^4, отличное от нуля).

Из уравнения $q^2 - q - 2 = 0$ находим: $q_1 = 2$, $q_2 = -1$.

Подставив значение $q = 2$ во второе уравнение системы, получим: $b_1 \cdot 16 \cdot 3 = 48$, т. е. $b_1 = 1$.

Подставив значение $q = -1$ во второе уравнение системы, получим: $b_1 \cdot 1 \cdot 0 = 48$; это уравнение не имеет решений.

Итак, $b_1 = 1$, $q = 2$ — эта пара является решением составлен ной системы уравнений.

Теперь мы можем записать геометрическую прогрессию, о ко торой идет речь в задаче: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Требуется вычислить b_{12}. Имеем:

$$b_{12} = b_1q^{11} = 1 \cdot 2^{11} = 2048.$$

О т в е т: $b_{12} = 2048$.

3. Формула суммы членов конечной геометрической прогрессии

Пусть дана конечная геометрическая прогрессия

$$\div\div\, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1}, b_n.$$

Обозначим через S_n сумму ее членов:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n.$$

Выведем формулу для отыскания этой суммы.

Начнем с самого простого случая, когда $q = 1$. Тогда геомет рическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ состоит из n чисел, равных b_1, т. е. прогрессия имеет вид $b_1, b_1, b_1, \ldots, b_1$. Сумма этих чисел равна nb_1.

Пусть теперь $q \neq 1$. Для отыскания S_n применим искусствен ный прием: сначала рассмотрим S_nq.

Имеем:

$$S_nq = (b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n)q =$$
$$= b_1q + b_2q + b_3q + \ldots + b_{n-2}q + b_{n-1}q + b_nq =$$
$$= b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_{n-1} + b_n + b_nq.$$

Значит,

$$S_n = b_1 + (b_2 + b_3 + \ldots + b_n),$$
$$S_nq = (b_2 + b_3 + \ldots + b_n) + b_nq.$$

Вычтем из второго равенства первое:

$$S_nq - S_n = b_nq - b_1.$$

В левой части вынесем за скобки общий множитель S_n, а в правой — используем формулу $b_n = b_1q^{n-1}$ и вынесем за скобки общий множитель b_1:

$$S_n(q-1) = b_1 \cdot q^{n-1} \cdot q - b_1;$$

$$S_n(q-1) = b_1(q^n - 1);$$

$$\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}.}$$

Это *формула суммы первых n членов геометрической прогрессии* (для случая, когда $q \neq 1$).

Пример 9. Дана конечная геометрическая прогрессия

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n.$$

Известно, что $b_1 = 3$, $q = 2$, $n = 6$. Найти:

а) сумму членов прогрессии; б) сумму квадратов ее членов.

Решение.

а) $S_6 = \frac{b_1(q^6 - 1)}{q - 1} = \frac{3(2^6 - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot 63 = 189.$

б) Выше (см. с. 157) мы уже отмечали, что если все члены геометрической прогрессии возвести в квадрат, то получится геометрическая прогрессия с первым членом b_1^2 и знаменателем q^2. Тогда сумма шести членов новой прогрессии будет вычисляться по формуле $S_6 = \frac{b_1^2((q^2)^6 - 1)}{q^2 - 1}$. Подставив в эту формулу $b_1 = 3$, $q = 2$, получим:

$$S_6 = \frac{9(2^{12} - 1)}{2^2 - 1} = 3 \cdot 4095 = 12\,285.$$

Ответ: а) 189; б) 12 285.

Пример 10. Найти 8-й член геометрической прогрессии, у которой $b_1 = 3$, $b_n = 96$, $S_n = 189$.

Решение. Так как $b_n = b_1q^{n-1}$, то получаем:

$$96 = 3q^{n-1};$$

$$q^{n-1} = 32.$$

Далее
$$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1};$$
$$189 = \frac{3(q^n-1)}{q-1};$$
$$63(q-1) = q^n - 1. \qquad (2)$$

Выше мы нашли, что $q^{n-1} = 32$. Умножив обе части этого равенства на q, получим: $q^n = 32q$. Подставив $32q$ вместо q^n в формулу (2), находим:
$$63(q-1) = 32q - 1;$$
$$31q = 62;$$
$$q = 2.$$

Зная, что $b_1 = 3$ и $q = 2$, вычислим b_8:
$$b_8 = b_1 \cdot q^7 = 3 \cdot 2^7 = 384.$$

О т в е т: $b_8 = 384$.

4. Характеристическое свойство геометрической прогрессии

Пусть дана геометрическая прогрессия $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$. Рассмотрим три ее члена, следующие друг за другом: b_{n-1}, b_n, b_{n+1}. Известно, что
$$\frac{b_n}{q} = b_{n-1},$$
$$b_n q = b_{n+1}.$$

Перемножив эти равенства, получим:
$$\boxed{b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}.}$$

Это значит, что квадрат каждого члена геометрической прогрессии, кроме первого (и последнего — в случае конечной прогрессии), равен произведению предшествующего и последующего членов.

Верно и обратное: если последовательность (b_n), состоящая из чисел, отличных от нуля, такова, что для любого $n > 1$ выполняется равенство
$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$
то (b_n) — геометрическая прогрессия.

В самом деле, последнее равенство можно переписать в виде

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Это значит, в частности, что $b_2 : b_1 = b_3 : b_2$, $b_3 : b_2 = b_4 : b_3$ и т. д. Иными словами, отношение любого члена последовательности к предшествующему члену всегда одно и то же, а это и означает, что задана геометрическая прогрессия.

Фактически мы доказали следующую теорему.

Теорема

***Числовая последовательность является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда квадрат каждого ее члена, кроме первого (и последнего — в случае конечной последовательности), равен произведению предшествующего и последующего членов** (характеристическое свойство геометрической прогрессии).*

В предыдущем параграфе мы получили характеристическое свойство арифметической прогрессии: любой ее член равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов. Обратимся теперь к характеристическому свойству геометрической прогрессии и выполним некоторые преобразования равенства $b_n^2 = b_{n-1}\,b_{n+1}$:

$$\sqrt{b_n^2} = \sqrt{b_{n-1}\,b_{n+1}};$$

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Число $\sqrt{ab}$ называют *средним геометрическим чисел* a и b. Таким образом, последнее равенство означает, что *модуль любого члена геометрической прогрессии равен среднему геометрическому предыдущего и последующего членов.* В такой формулировке отчетливее обнаруживается аналогия между характеристическими свойствами арифметической и геометрической прогрессий.

Пример 11. При каком значении x числа $10x + 7$, $4x + 6$ и $2x + 3$ образуют геометрическую прогрессию?

Решение. Согласно характеристическому свойству заданные выражения должны удовлетворять соотношению

$$(4x + 6)^2 = (10x + 7)(2x + 3).$$

Решая это уравнение, находим:

$$16x^2 + 48x + 36 = 20x^2 + 44x + 21;$$

$$4x^2 - 4x - 15 = 0;$$

$$x_1 = 2{,}5, \quad x_2 = -1{,}5.$$

Подставляя $x_1 = 2{,}5$ в заданные выражения $10x + 7$, $4x + 6$, $2x + 3$, находим соответственно: 32, 16, 8. Это конечная геометрическая прогрессия. Подставляя $x_2 = -1{,}5$ в заданные выражения $10x + 7$, $4x + 6$, $2x + 3$, находим соответственно: -8, 0, 0. Это не геометрическая прогрессия.

О т в е т: $x = 2{,}5$.

Завершая разговор о прогрессиях, рассмотрим достаточно сложный пример (из серии так называемых смешанных задач на прогрессии).

П р и м е р 12. Взяли три числа, которые образуют конечную возрастающую геометрическую прогрессию. Заметили, что если второе число увеличить на 2, а первое и третье числа оставить без изменения, то получится арифметическая прогрессия. Если после этого третье число увеличить на 9, то снова получится геометрическая прогрессия. Какие три числа были взяты сначала?

Р е ш е н и е. <u>Первый этап</u>. *Составление математической модели.* Условия задачи можно кратко записать так:

1) ∺ b_1, b_2, b_3;
2) ÷ $b_1, b_2 + 2, b_3$;
3) ∺ $b_1, b_2 + 2, b_3 + 9$.

Согласно характеристическому свойству арифметической прогрессии условие 2) означает, что

$$b_2 + 2 = \frac{b_1 + b_3}{2}.$$

Далее получаем:

$$2(b_1q + 2) = b_1 + b_1q^2;$$

$$b_1(1 + q^2 - 2q) = 4. \qquad (3)$$

Согласно характеристическому свойству геометрической прогрессии условие 3) означает, что

$$(b_2 + 2)^2 = b_1(b_3 + 9).$$

Далее получаем:

$$(b_1q + 2)^2 = b_1(b_1q^2 + 9);$$

$$b_1^2 q^2 + 4b_1q + 4 = b_1^2 q^2 + 9b_1;$$

$$b_1(9 - 4q) = 4. \qquad (4)$$

Таким образом, получаем систему двух уравнений ((3) и (4)) с двумя переменными b_1 и q:

$$\begin{cases} b_1(1 + q^2 - 2q) = 4, \\ b_1(9 - 4q) = 4, \end{cases}$$

которая в сочетании с записанным выше условием 1) и представляет собой математическую модель задачи.

Второй этап. *Работа с составленной моделью.*

Приравняв левые части обоих уравнений системы, получаем:

$$b_1(1 + q^2 - 2q) = b_1(9 - 4q);$$

$$1 + q^2 - 2q = 9 - 4q$$

(мы разделили обе части уравнения на b_1, т. е. на число, отличное от нуля). Далее имеем:

$$q^2 + 2q - 8 = 0;$$

$$q_1 = 2, \ \ q_2 = -4.$$

Подставив значение $q = 2$ во второе уравнение системы, получим: $b_1 = 4$. Зная b_1 и q, нетрудно записать три числа, образующие геометрическую прогрессию: 4, 8, 16.

Подставив значение $q = -4$ во второе уравнение системы, получим: $b_1 = \frac{4}{25}$. Зная b_1 и q, нетрудно записать три числа, образующие геометрическую прогрессию: $\frac{4}{25}$, $-\frac{16}{25}$, $\frac{64}{25}$.

Третий этап. *Ответ на вопрос задачи.*

Из двух найденных геометрических прогрессий только первая является возрастающей, как того требует условие задачи.

Ответ: 4, 8, 16.

5. Прогрессии и банковские расчеты

Представьте себе, что вы открыли в банке вклад в сумме a р. под p% годовых на t лет. У вас есть две стратегии поведения: либо в конце каждого года хранения вклада снимать проценты по вкладу, т. е. полученную прибыль в размере $\frac{p}{100} \cdot a$ р., либо прийти в банк один раз — в конце срока хранения вклада. Какой доход вы получите в том и другом случаях?

В первом случае при $t = 1$ вы получите $\left(a + \frac{p}{100} \cdot a\right)$ р., при $t = 2$ ваша итоговая сумма составит $\left(a + \frac{2p}{100} \cdot a\right)$ р., при $t = 3$ — $\left(a + \frac{3p}{100} \cdot a\right)$ р. и т. д. Математическая модель ситуации — конечная арифметическая прогрессия

$$a,\ a + \frac{p}{100} \cdot a,\ a + \frac{2p}{100} \cdot a,\ a + \frac{3p}{100} \cdot a,\ \ldots,\ a + \frac{tp}{100} \cdot a.$$

Итак, при первой стратегии поведения за t лет вы получите $a\left(1 + \frac{tp}{100}\right)$ р. — это так называемая *формула простых процентов.*

Если вы решили прийти в банк только в конце срока хранения вклада, то при $t = 1$ получаемая сумма составит, как и в первом случае, $a + \frac{p}{100} \cdot a$, т. е. $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ р.; сумма вклада увеличилась в $(1 + \frac{p}{100})$ раз. Во столько же раз она увеличится и к концу второго года хранения, и к концу третьего года хранения и т. д. Математическая модель ситуации — конечная геометрическая прогрессия

$$a,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right),\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^2,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^3,\ \ldots,\ a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t.$$

Итак, при второй стратегии поведения за t лет вы получите $a\left(1 + \frac{p}{100}\right)^t$ р. — это так называемая *формула сложных процентов.*

Рассмотрим конкретный пример. Пусть вклад составляет 10 000 р., банк дает 10 % годовых, срок хранения вклада — 5 лет. Если вы выбрали стратегию простых процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную

$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{5 \cdot 10}{100}\right)$, т. е. 15 000 р. Если же вы выбрали стратегию сложных процентов, то к концу срока хранения вы получите в итоге сумму, равную $10\,000 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)^5$, т. е. 16 105,1 р. Как говорится в одном рекламном слогане, почувствуйте разницу.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Вы познакомились с новой математической моделью — числовой последовательностью (функцией натурального аргумента).

- Вы узнали новые термины математического языка:
числовая последовательность, n-й член последовательности;
монотонная (возрастающая, убывающая) последовательность;
арифметическая прогрессия, разность арифметической прогрессии;
геометрическая прогрессия, знаменатель геометрической прогрессии.

- Мы ввели новые обозначения:
(y_n) или $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$ — для числовой последовательности;
$\div$ — для арифметической прогрессии;
$\because\!\!\cdot$ — для геометрической прогрессии;
S_n — для суммы $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ членов последовательности (x_n).

- Мы обсудили три способа задания числовой последовательности: аналитический; словесный; рекуррентный.

- Мы сформулировали и обосновали ряд свойств арифметической и геометрической прогрессий. Сведем их в одну таблицу.

	Арифметическая прогрессия	**Геометрическая прогрессия**
Определение	$a_1 = a,\ \ a_n = a_{n-1} + d$	$b_1 = b,\ \ b_n = b_{n-1} \cdot q,$ $b \neq 0,\ q \neq 0$
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$b_n = b_1 q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$	$\lvert b_n \rvert = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}}$
Формула суммы n членов	$S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$	$S_n = \dfrac{b_1(q^n - 1)}{q - 1},\ q \neq 1$

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 18. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Простейшие комбинаторные задачи несколько напоминают детскую игру в кубики. Имеется конечное число кубиков, или элементов некоторого конечного множества, а нужно посчитать количество тех или иных комбинаций, составленных из этих кубиков (элементов). Если нужных комбинаций не слишком много, то все их можно просто перечислить, или, как говорят, перебрать все возможности. В этом и состоит *метод перебора вариантов*. Например, если из цифр 1, 5, 9 следует составить трехзначное число без повторяющихся цифр, то все возможные варианты нетрудно выписать. Это 159, 195, 519, 591, 915 и 951. Значит, всего можно составить шесть таких чисел.

Подчеркнем, что уже в этом простом примере мы привели не случайный, а разумно *организованный перебор*. Сначала на первом месте зафиксировали 1 и увидели, что таких вариантов всего два: 159 и 195. Затем на первое место поставили 5 и увидели, что получилось еще два варианта: 519 и 591. Наконец, таким же образом составили числа, начинающиеся с 9, — это 915 и 951.

Хорошо подобранный перебор вариантов крайне важен в более сложных ситуациях, когда и количество возможных комбинаций достаточно велико, и подсчет приходится вести, рассматривая различные случаи.

Пример 1. Из цифр 2, 4, 7 следует составить трехзначное число, в котором ни одна цифра не может повторяться более двух раз.

а) Найти наименьшее такое число.

б) Найти наибольшее такое число.

в) Сколько таких чисел, начинающихся с 2, можно составить?

г) Сколько всего таких чисел можно составить?

Р е ш е н и е. а) Наименьшим числом будет 224, ведь если на первое или на второе место вместо цифры 2 поставить цифру 4 или цифру 7, то увеличится или число сотен, или число десятков. А раз цифра 2 уже повторилась, то на последнем месте должна стоять цифра 4 (а не 7).

б) Рассуждая аналогично, найдем наибольшее число — это 774.

в) Сначала назовем числа без повторений цифр. Это 247 и 274. Потом назовем числа, в которых повторяется 2. Это 224, 227, 242, 272. Число, в котором повторена цифра 4, только одно — это 244. Число, в котором повторена цифра 7, также одно — это 277. Всего получилось $2 + 4 + 1 + 1 = 8$ чисел.

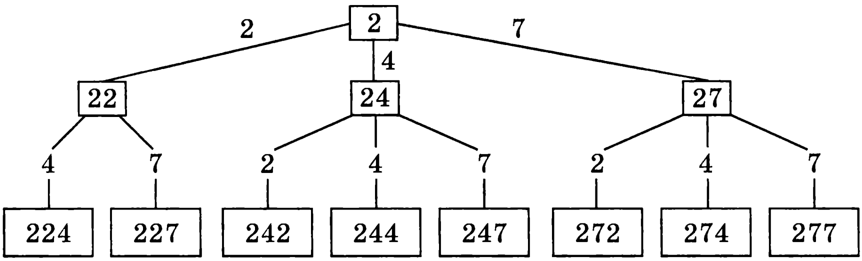
г) Количество чисел, начинающихся с цифры 4, можно посчитать так же, как в пункте в); их всего восемь. Разумеется, то же верно и для чисел, начинающихся с цифры 7, их тоже восемь. Всего получим 24 числа.

О т в е т: а) 224; б) 774; в) 8; г) 24.

Формально для ответа в пункте г) можно было бы и не решать а) и б). Однако в каждой задаче на перебор вариантов бывает полезно явно выписать несколько типичных комбинаций, количество которых мы собираемся подсчитать.

Как и многие математические задачи, пример 1 г) допускает другой способ решения. Вот он. Найдем сначала количество *всех* трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 7. По *правилу умножения*, с которым мы познакомимся чуть позже, их будет $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. А теперь вычтем количество чисел с тройными повторениями цифр. Таких чисел всего три: 222, 444, 777. Значит, ответ: $27 - 3 = 24$.

Решение примера 1 в) также можно оформить совсем по-другому, записав построение трехзначного числа шаг за шагом, в виде некоторого «поэтажного» плана. Поместим первую цифру 2 в верхний прямоугольник, от которого проведем три «дороги» (рис. 128). Они соответствуют выбору второй цифры. Это или 2, или 4, или 7. Получим три прямоугольника на втором уровне и перейдем к выбору третьей цифры. Если второй цифрой оказалась 2, то по условию третьей цифрой может быть или 4, или 7. Значит,



Всего: 8 чисел

Рис. 128

тут возможно всего два варианта, в результате которых получатся трехзначные числа 224 и 227. Если же вторая цифра равна 4 или 7, то для третьей цифры ограничений нет, и это может быть или 2, или 4, или 7. Значит, в каждом из этих двух случаев возможны по три варианта составления трехзначных чисел. Получатся числа 242, 244, 247 и 272, 274, 277.

Мы составили так называемое *дерево возможных вариантов*. Преимущество этого способа рассуждения состоит в его наглядности: все варианты видны на картинке (см. рис. 128), и понятно, как именно организован перебор всех возможностей.

Пример 2. «Этот вечер свободный можно так провести...»*: пойти прогуляться к реке, на площадь или в парк и потом пойти в гости к Вите или к Вике. А можно остаться дома, сначала посмотреть телевизор или почитать книжку, а потом поиграть с братом или разобраться наконец у себя на письменном столе. Нарисовать дерево возможных вариантов.

Ответ: Дерево вариантов представлено на рис. 129.

Пример 3. В урне лежат три неразличимых на ощупь шара: два белых и один черный. При вытаскивании черного шара его возвращают обратно, а вытащенный белый шар откладывают в сторону. Такую операцию производят три раза подряд.

а) Нарисовать дерево возможных вариантов.

б) В скольких случаях три вытащенных шара будут одного цвета?

---

* «Этот вечер свободный / Можно так провести:/ За туманный Обводный / Невзначай забрести...» (А. Кушнер).

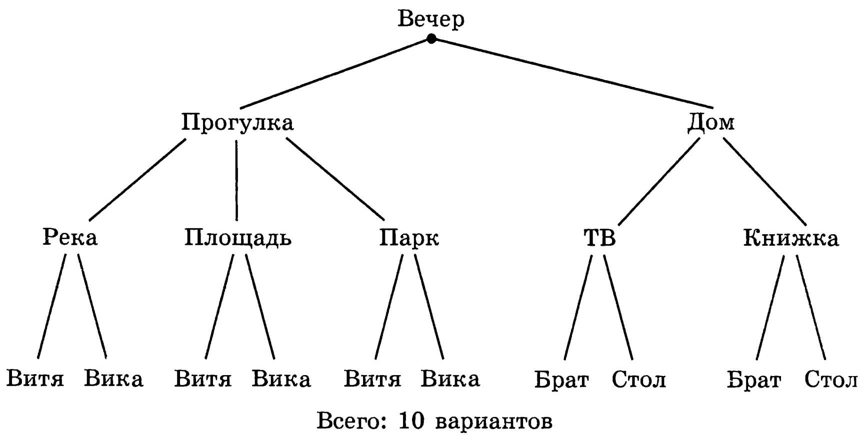


Рис. 129

в) В скольких случаях среди вытащенных шаров белых будет больше?

г) Нарисовать дерево возможных вариантов для четырех вытаскиваний шаров.

Р е ш е н и е. а) Дерево возможных вариантов представлено на рис. 130.

Случай вытаскивания двух белых шаров особенный. В этом случае остается один черный шар и только его потом и можно будет брать.

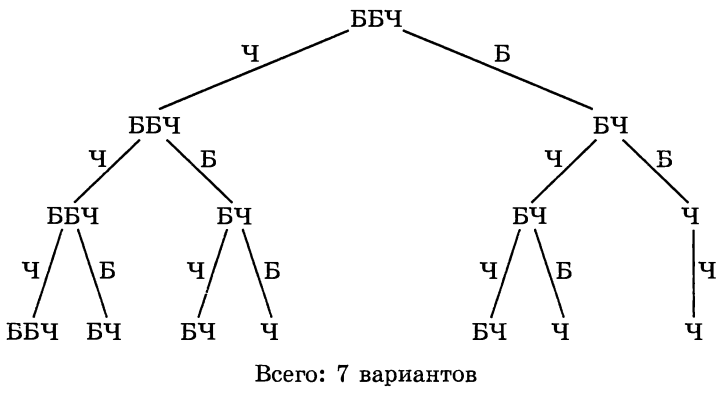
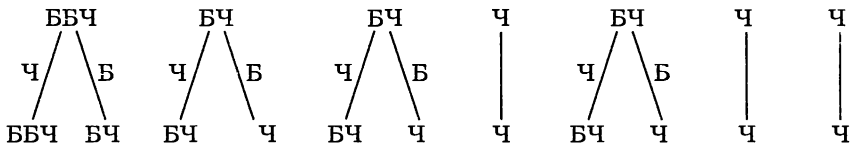


Рис. 130



Всего: 11 вариантов

Рис. 131

б) По дереву вариантов видно, что это возможно в единственном случае, когда три раза подряд вытаскивается шар черного цвета.

в) Трех белых шаров быть не может. Значит, речь идет о двух белых и одном черном шаре. Это возможно в трех случаях (см. дерево вариантов: ББЧ, БЧБ, ЧББ).

г) Здесь к последнему уровню дерева вариантов на рис. 130 добавится еще один уровень, соответствующий четвертому выбору (рис. 131).

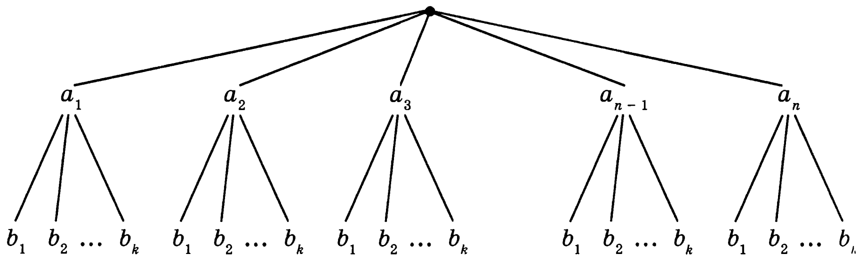
Такого рода диаграммы в подробностях удобно рисовать только для сравнительно небольшого числа вариантов, а, например, для сотен комбинаций дерево вариантов целиком не нарисуешь. Тогда приходится действовать по-другому. Чаще всего при различных подсчетах используют *правило умножения.*

ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

Для того чтобы найти число всех возможных исходов независимого проведения двух испытаний A и B, следует перемножить число всех исходов испытания A и число всех исходов испытания B.

Для объяснения правила умножения нарисуем дерево вариантов. На первом уровне у нас будут перечислены все исходы a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n испытания A. После каждого из уже выписанных исходов возможны все исходы b_1, b_2, b_3, ..., b_{k-1}, b_k испытания B — ведь испытания предполагаются независимыми. В результате получится $\underbrace{k + k + k + \ldots + k}_{n} = nk$ исходов (рис. 132).

Правило умножения можно объяснить и по-другому, с использованием таблицы возможных результатов проведения двух испытаний. Поясним это на примере.



Всего: n раз по k, т. е. nk исходов

Рис. 132

П р и м е р 4. На завтрак Вова может выбрать плюшку, бутерброд, пряник или кекс, а запить их он может кофе, соком или кефиром. Сколько вариантов завтрака есть у Вовы?

Р е ш е н и е. Соберем все варианты в таблицу.

	Плюшка	*Бутерброд*	*Пряник*	*Кекс*
Кофе	Кофе, плюшка	Кофе, бутерброд	Кофе, пряник	Кофе, кекс
Сок	Сок, плюшка	Сок, бутерброд	Сок, пряник	Сок, кекс
Кефир	Кефир, плюшка	Кефир, бутерброд	Кефир, пряник	Кефир, кекс

Так как выбор еды и напитка происходит независимо, то в каждой клетке будет стоять один из возможных вариантов завтрака. Верно и обратное: любой вариант завтрака будет расположен в одной из клеток. Значит, всего вариантов столько же, сколько и клеток, т. е. 12.

О т в е т: 12.

Замечание 1. Всякий раз в конкретной задаче совсем не обязательно рисовать таблицу и заполнять ее целиком. Можно просто использовать само правило умножения. В примере 4 решение может выглядеть так: «Испытание *A* — выбор еды, у него четыре исхода, а испытание *B* — выбор напитка, у него три исхода. Выбор еды и выбор напитка независимы друг от друга. По правилу умножения получаем ответ: $4 \cdot 3 = 12$».

Замечание 2. Правило умножения для *двух* испытаний удобно объяснять, как мы видим, используя прямоугольные таблицы. Но если проводятся *три* испытания, то для иллюстрации надо использовать и длину, и высоту, и ширину. На картинке получится прямоугольный параллелепипед, разбитый на кубики. Здесь уже и рисунок, и объяснения выглядят сложнее, поскольку, например, будут невидимые кубики. Еще хуже дело обстоит с *четырьмя* испытаниями. Для рисунка в этом случае нам не хватит измерений, поскольку окружающее нас пространство всего лишь трехмерно. Тем не менее правило умножения верно и для трех, и для четырех и т. д. независимых испытаний. Для объяснения достаточно нарисовать нужное дерево вариантов и подсчитать количество возможных вариантов.

Для следующего примера мы приведем три способа решения: перебором, с помощью дерева вариантов и по правилу умножения.

Пример 5. В коридоре три лампочки. Сколько имеется различных вариантов освещения, включая случай, когда все лампочки не горят?

Решение. Первый способ (перебор вариантов). Пронумеруем лампочки и будем писать + или − в зависимости от того, горит или не горит очередная лампочка. Тогда все способы освещения можно просто перечислить. Вот они: + + +, + + −, + − +, + − −, − + +, − + −, − − +, − − −. Всего восемь вариантов.

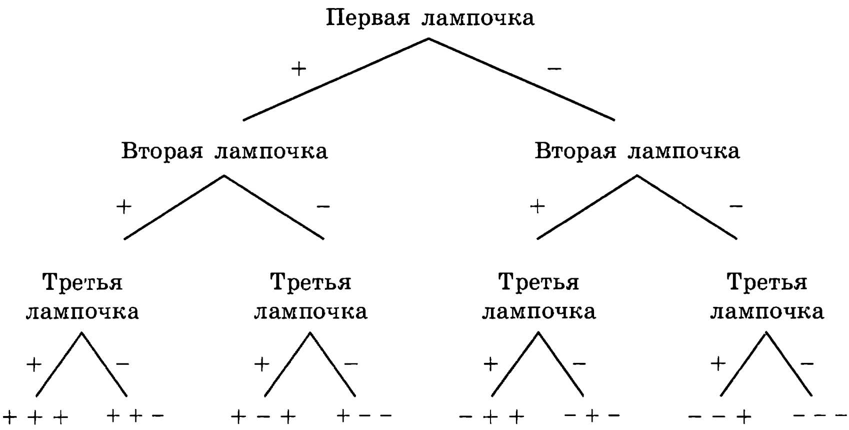


Рис. 133

Второй способ (дерево вариантов). На рис. 133 наглядно представлены восемь вариантов освещения коридора.

Третий способ (правило умножения). Первая лампочка может или гореть, или не гореть, т. е. имеется два возможных исхода. Но то же самое относится ко второй и к третьей лампочке. Мы предполагаем, что лампочки горят или нет *независимо* друг от друга. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов освещения равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

Ответ: 8.

У каждого из этих трех способов решения в каждом конкретном случае есть и преимущества, и недостатки. Выбор способа решения — за вами! Отметим все же, что правило умножения позволяет практически одним способом решать самые разнообразные задачи. Например, оно приводит к крайне важному в математике понятию *факториала*.

Пример 6. В семье шесть человек, а за столом в кухне шесть стульев. Было решено каждый вечер перед ужином рассаживаться на эти шесть стульев по-новому. Сколько дней члены семьи смогут делать это без повторений?

Решение. Ответ оказывается неожиданно большим: почти два года! Объясним его. Для удобства рассуждений пронумеруем стулья № 1, № 2, № 3, № 4, № 5, № 6 и будем считать, что члены семьи (бабушка, дедушка, мама, папа, дочь, сын) занимают места по очереди. Нас интересует, сколько всего существует различных способов рассаживания.

Предположим, что первой садится бабушка. У нее имеется шесть вариантов выбора стула. Вторым садится дедушка и *независимо* выбирает стул из пяти оставшихся. Мама делает свой выбор третьей, и выбор у нее будет из четырех стульев. У папы будет уже три варианта, у дочки — два, ну а сын сядет на единственный незанятый стул. По правилу умножения получаем, что всего имеется $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ различных способов рассаживания, а 720 дней — это и есть почти два года.

Ответ: 720 дней.

Определение. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают $n!$ и называют **«эн факториал»**:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Одно из значений английского слова *factor* — «множитель». Так что *эн факториал* примерно переводится как «состоящий из n множителей». Приведем несколько первых значений для $n!$.

n	1	2	3	4	5	6	7
$n!$	1	$1 \cdot 2 = 2$	$2! \cdot 3 = 6$	$3! \cdot 4 = 24$	$4! \cdot 5 = 120$	$5! \cdot 6 = 720$	$6! \cdot 7 = 5040$

Значения $n!$ очень быстро возрастают с увеличением n. Например, 10! больше, чем 3,5 миллиона, а 15! примерно равно 1,3 триллиона.

Для подсчетов, связанных с $n!$, бывает удобно использовать следующую формулу.

Формула	Объяснение
$n! = (n-1)! \cdot n$	$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n =$ $= (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)) \cdot n = (n-1)! \cdot n$

Например, для вычисления значения $\frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!}$ совсем не обязательно находить все четыре факториала и потом производить вычисления. Удобнее сначала провести сокращения:

$$\frac{7! \cdot 4!}{6! \cdot 5!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 4!}{6! \cdot 4! \cdot 5} = \frac{7}{5} = 1,4.$$

Пример 7.

а) Сколькими способами четыре вора могут по одному разбежаться на все четыре стороны?

б) В 9 «А» классе в среду семь уроков: алгебра, геометрия, литература, русский язык, английский язык, биология и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить на среду?

Решение.

а) Пусть воры разбегаются поочередно. Тогда у первого есть четыре варианта выбора направления, у второго — три варианта, у третьего — два и у последнего — один вариант. По правилу умножения получаем ответ: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$.

б) Для алгебры есть семь вариантов расположения в расписании. Если для алгебры выбор сделан, то для геометрии будет уже шесть вариантов. Если алгебра и геометрия заняли в расписании свое место, то для литературы остается пять вариантов и т. д. По правилу умножения получаем: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 7! = 5040$.

О т в е т: а) 24; б) 5040.

Мы видим, что условия задач выглядят по-разному, а решаются эти задачи почти одним и тем же способом. Значит, есть какое-то общее правило для решения такого типа задач. Мы сформулируем его в виде теоремы о перестановках элементов конечного множества.

Теорема | ***n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно n! способами.***

Исторически сложилось так, что более употребителен не термин «расстановка», а термин «перестановка», и поэтому эту теорему чаще формулируют так: «*Число всех перестановок множества из n элементов равно n!*». Сокращенно это записывают в виде формулы

$$\boxed{P_n = n!}$$

В этом сокращении буква P соответствует первой букве английского глагола (существительного) *permute (permutation)*, который и переводится как «переставлять» («перестановка»). Например, $P_3 = 3! = 6$, $P_7 = 7! = 5040$ и т. д.

§ 19. СТАТИСТИКА — ДИЗАЙН ИНФОРМАЦИИ

Начнем с конкретного примера. Допустим, что в 9-х классах «А» и «Б» измерили рост (в сантиметрах) 50 учеников. Получился набор из 50 чисел. Вряд ли самое маленькое из них будет меньше 140, а самое большое — больше 200. Можно, соблюдая очередность измерений, выписать все данные в строчку через запятую. Можно расположить их в две колонки в соответствии с классными списками. Можно как-то записать их в виде таблицы 5×10 и т. п. В итоге будет собрана полная информация о проведенном измерении. К сожалению, практически при любом способе расположения *абсолютно всех* данных эта информация трудно читается: она не наглядна, занимает много места, никак не упорядочена и т. д.

А представьте результаты, состоящие не из 50 данных, а из 500, 5000 или из миллионов различных чисел! Например, число и размеры вкладов в Сбербанке за текущий год или данные о производительности труда на предприятиях какой-нибудь отрасли по всей стране, результаты голосования по всем избирательным участкам и т. п. Единственный разумный выход — каким-то образом *преобразовать* первоначальные данные измерения, в первую очередь заметно уменьшив их общее количество. Одна из основных задач статистики как раз и состоит в надлежащей *обработке информации*. Конечно, у статистики есть много других задач: получение и хранение информации, выработка различных прогнозов, оценка их достоверности и т. д. Ни одна из этих целей не достижима без обработки данных.

Итак, в первую очередь займемся статистическими методами обработки информации. Как правило, порядок преобразований первоначально полученной информации таков:

1) сначала данные измерений *упорядочивают* и *группируют*;
2) затем составляют *таблицы распределения данных*;
3) таблицы распределения переводят *в графики распределения*;
4) наконец, получают своего рода *паспорт данных* измерения, в котором собрано небольшое количество основных *числовых характеристик* полученной информации.

Зафиксируем одно конкретное измерение и проследим шаг за шагом, как его данные преобразуются в процессе обработки информации.

Измерение (И). У 50 работников городского предприятия попросили оценить время, которое они в среднем тратят на проезд от дома до работы. Получились следующие данные в минутах (с точностью до 10 минут).

20	100	20	30	40	50	30	80	90	40
30	50	20	50	30	30	50	60	60	50
30	40	60	50	100	60	90	10	20	50
90	80	20	40	50	10	50	40	30	40
60	120	30	40	60	20	60	10	50	60

1. Группировка информации. Первое, что следует оценить, — это рамки, в которых вообще могут находиться данные измерения. Менее 10 минут (т. е. 0 минут) никто не заявил (территориально дом и работа — это не одно и то же), а более 180 минут (более трех часов) на проезд по городу в одну сторону вряд ли кто-то будет тратить каждый день. Значит, в принципе в этом измерении могли получиться числа 10, 20, 30, ..., 160, 170, 180. Мы составили *общий ряд данных*. Данные располагают, как правило, *в порядке возрастания*.

Итак:

Измерение	Общий ряд данных
Время проезда (мин)	10, 20, 30, ..., 170, 180

Пример 1. Выписать общий ряд данных следующих измерений:

а) месяц рождения учеников вашей школы; б) год рождения ваших родственников и знакомых; в) годовой процент начислений по вкладам в банке; г) начальные буквы в первой строке стихотворения.

Решение. а) Всего может получиться 12 месяцев. Если перечислить их не по названиям, а по номерам, то получим общий ряд данных:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

б) Вряд ли у вас есть родственники или знакомые, которым много больше 100 лет, а вот новорожденные вполне могут встретиться. Значит, общий ряд данных выглядит так: 1900, 1901, 1902, ..., 2005, 2006, 2007, 2008.

в) Никакой уважающий себя банк более 15 % годовых не даст. Что касается нижней оценки, то тут менее 0,1 %, которые дает Сбербанк России по вкладам до востребования, невозможно представить. Значит, в этом случае общий ряд данных выглядит так: 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1; 2; 3; ...; 14; 15.

г) В первой строке стихотворения в принципе могут встретиться все буквы русского алфавита от А до Я. Следует исключить нереальные случаи (Ь, Ъ, Ы). Оставшиеся буквы можно, например, перенумеровать по порядку и перейти к числовому общему ряду: 1, 2, 3, ..., 29, 30. ◼

Подчеркнем, что определения в статистике не всегда носят столь же точный характер, как, скажем, определения в геометрии или алгебре. Например, в пункте б) примера 1 от добавления 1899 к последовательности 1900, 1901, 1902, ..., 2008 она не перестанет быть общим рядом данных. В пункте в) все годовые проценты можно было измерять с точностью до десятых, и тогда общий ряд данных составили бы числа 0,1; 0,2; ...; 0,9; 1; 1,1; ...; 14,9; 15.

При проведении конкретного измерения вполне может случиться так, что какие-то данные из общего ряда вообще не встретятся. Значит, надо отличать реально полученные результаты измерения от общего ряда данных. Например, в измерении (И) нам встретились только такие результаты: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120. Каждое из этих чисел называют *вариантой* измерения (несколько непривычно, но в статистике используют слово именно женского рода).

Варианта измерения — *один из результатов этого измерения.*

Если все варианты измерения перечислить по порядку (и без повторений), то получится *ряд данных измерения*. В нашем измерении (И) ряд данных — это 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120.

Итак:

Измерение	Общий ряд данных	Ряд данных измерения
Время проезда (мин)	10, 20, 30, ..., 170, 180	10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 90, 100, 120

П р и м е р 2. Выписать ряд данных измерения, состоящего из всех разных букв первых двух строк стихотворений:

а) «Не говори никому / Всё, что ты видел, забудь...»*;

б) «Это дерево сосна, / И судьба сосны ясна...»**.

Р е ш е н и е. а) *а, б, в, г, д, е, ё, з, и, к, л, м, н, о, р, с, т, у, ч, ы, ь*. Тут использована 21 буква на 33 местах и повторений букв очень мало.

б) *а, б, в, д, е, и, н, о, р, с, т, у, ы, ь, э, я*. Здесь использованы 16 букв на 30 местах, повторений больше, и в особенности это относится к букве «с» (6 повторений). ◙

Как мы видим, не все варианты конкретного измерения находятся в одинаковом положении. Какие-то встречаются много раз, какие-то реже, а некоторые встречаются по одному разу.

* Из стихотворения О. Мандельштама.

** Из стихотворения Ю. Минералова.

Определение. Если среди всех данных конкретного измерения одна из вариант встретилась ровно k раз, то число k называют **кратностью** этой варианты измерения.

Например, в измерении (И) время 60 минут встретилось восемь раз, а время 120 минут встретилось однажды. Значит, кратность варианты 60 равна восьми, а кратность варианты 120 равна единице. Перед дальнейшей обработкой данные измерения удобно *сгруппировать*. Делается это так. Для удобства запишем данные измерения (И) в десятках минут.

~~2~~	~~10~~	~~2~~	3	4	5	3	8	9	4
3	5	2	5	3	3	5	6	6	5
3	4	6	5	10	6	9	1	2	5
9	8	2	4	5	1	5	4	3	4
6	12	3	4	6	2	6	1	5	6

Будем двигаться по строчкам и зачеркивать очередные результаты, а каждое зачеркивание копировать ниже соответствующей варианты в ряду данных. Первые три результата 2, 10, 2 в первой строке зачеркнуты в знак того, что мы их уже учли. Линии, которыми эти результаты перечеркнуты, повторим в выписанном заранее общем ряде данных:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	//								/		

Вот что получится после прохождения первой строки: в ней по два раза встретились варианты 2, 3, 4 и по одному разу — варианты 5, 8, 9, 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	//	//	//	/			/	/	/		

Результат после прохождения первых двух строк выглядит так:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	///	~~////~~	//	~~////~~	//		/	/	/		

Для удобства подсчетов вместо каждой пятой черточки проводят линию с другим наклоном, которая перечеркивает четыре предыдущие черточки. На практике, конечно, все подсчеты производят в одном месте: ведь промежуточные результаты не нужны. Вот как в итоге будет выглядеть результат подсчета кратностей в нашем примере:

1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
///	~~////~~ /	~~////~~ ///	~~////~~ //	~~////~~ ~~////~~	~~////~~ ///	//	///	//	/

Теперь можно составить *сгруппированный ряд данных*. В нем каждая варианта повторена именно столько раз, сколько она встретилась в измерении, т. е. число повторений каждой варианты равно кратности этой варианты:

$$1, 1, 1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{6}, \underbrace{3, \ldots, 3}_{8}, \underbrace{4, \ldots, 4}_{7}, \underbrace{5, \ldots, 5}_{10}, \underbrace{6, \ldots, 6}_{8}, 8, 8, 9, 9, 9, 10, 10, 12$$

На этом заканчивается первый шаг обработки информации — ее упорядочивание и группировка.

2. Табличное представление информации. Внесем в таблицу ряд данных измерения и кратности соответствующих вариант. Получим *таблицу распределения* данных. Вот как это выглядит в измерении (И).

	Варианта										**Сумма**
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**8**	**9**	**10**	**12**	
Кратность	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50

Если сложить все кратности, то получится количество всех данных измерения — *объем измерения*. Так как опрашивали 50 работников, то объем измерения (И) равен именно 50. На практике для контроля всегда складывают найденные кратности вариант: сумма должна равняться объему измерения.

Далее, при общей оценке распределения данных не очень важно, что, например, варианта 1 имеет кратность 3 среди всех 50 данных. Так как $\frac{3}{50} = 0{,}06$, то удобнее сказать, что эта варианта занимает шесть сотых общего объема измерения. Так и поступают, т. е. делят кратность варианты на объем измерения и получают **частоту** варианты.

$$\textbf{Частота варианты} = \frac{\textit{Кратность варианты}}{\textit{Объем измерения}}$$

Частоты всех вариант удобно приписать следующей строкой к уже составленной таблице. Полученную таблицу называют *таблицей распределения частот* измерения. Вот как это выглядит в измерении (И).

	Варианта										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Кратность	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

Сумма всех частот всегда равна 1 — ведь это сумма дробей с одинаковым знаменателем, у которых сумма всех числителей как раз и равна этому знаменателю. Для удобства счета и построения графиков частоты переводят в проценты от объема измерения. Тогда таблицу распределения дополняют еще строкой частот в процентах. Она получается из предыдущей строки умножением на 100 %. Итак, для измерения (И) получаем такую таблицу.

	Варианта										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Кратность	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1	50
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1
Частота, %	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2	100

Сумма всех частот в процентах, конечно же, равна 100.

3. Графическое представление информации. Итак, распределение данных измерения удобно задавать с помощью таблиц. Но мы знаем, что и для функций есть *табличный* способ их задания. Таблицы образуют «мостик», по которому от распределения данных можно перейти к функциям и графикам.

Отложим по оси абсцисс значения из первой строки таблицы распределения, а по оси ординат — значения из ее второй строки. Построим соответствующие точки в координатной плоскости. Получим графическое изображение имеющейся информации — *график распределения выборки.* Построенные точки для наглядности соединяют отрезками. Вот как это выглядит в измерении (И), данные которого мы уже представили в табличном виде.

По оси абсцисс	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
По оси ординат	3	6	8	7	10	8	2	3	2	1

На координатной плоскости мы получили ломаную линию (рис. 134), которая является графиком некоторой кусочно-линейной функции. Эту ломаную называют *многоугольником* или *полигоном распределения* данных. Собственно, *polygon* и переводится как «многоугольник».

Точно так же составленные таблицы распределения частот и распределения частот в процентах позволяют построить *многоугольник частот* и *многоугольник частот в процентах.* Для наглядности в практических приложениях удобнее использовать многоугольники частот в процентах: в них изменения по оси ординат от 1 до 100 более выразительны, чем изменения от 0 до 1.

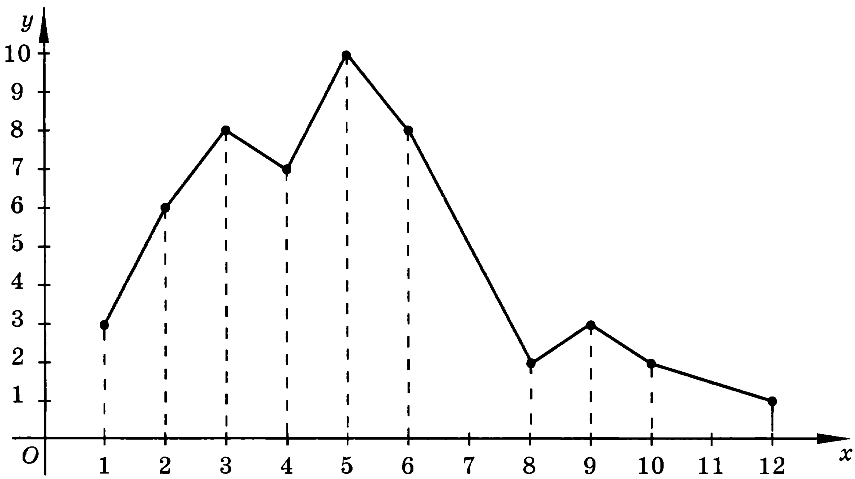


Рис. 134

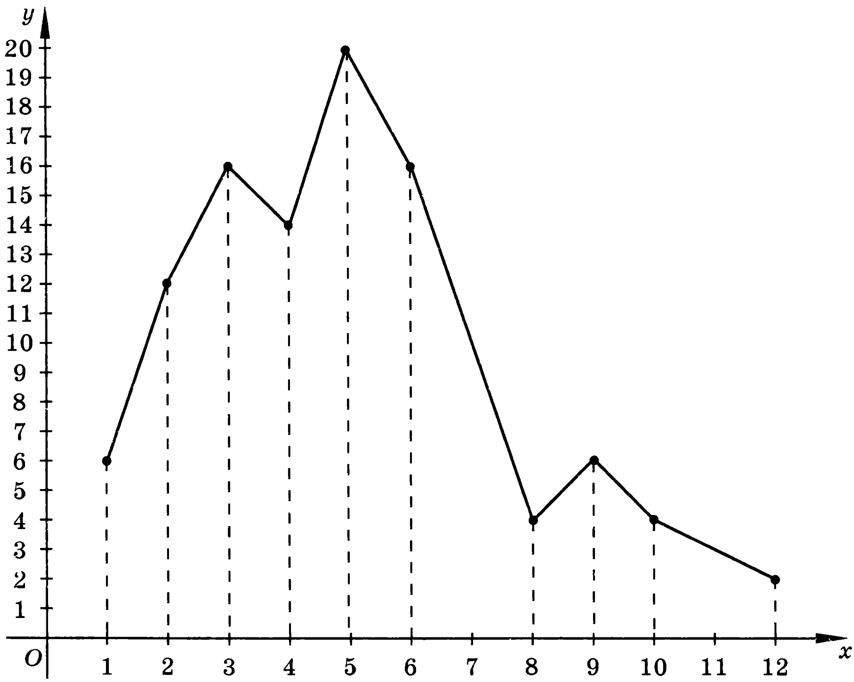


Рис. 135

Построим многоугольник частот в процентах для измерения (И) (рис. 135).

По оси абсцисс	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12
По оси ординат	6	12	16	14	20	16	4	6	4	2

Мы видим, что даже для небольшого объема измерений аккуратное «причесывание» информации — довольно кропотливая работа. При оперировании с большими объемами информации используют методы приближенной группировки данных. В таких случаях вариантой измерения является не одно число, а числовой промежуток.

Например, в измерении (И) всех работников предприятия можно разделить на три группы. Во-первых, это те, кто живет близко от работы. Они тратят на дорогу 10, 20 или 30 минут.

Во-вторых, это те, кто живет недалеко. Их путь занимает от 40 до 60 минут. Все остальные живут далеко и проводят в дороге более часа. Тем самым мы разбили промежуток между самой маленькой и самой большой вариантой на промежутки 1—3; 4—6; 8—12 (в десятках минут). Вместо десяти первоначальных вариант получилось всего три новые: близко, недалеко, далеко.

Для каждого промежутка можно найти количество результатов измерения, попавших в этот промежуток. Получим кратности и таблицу распределения новых вариант.

	Варианта			Сумма
	близко	недалеко	далеко	
Кратность	17	25	8	50

Разумеется, можно составить и таблицы распределения частот и процентных частот новых вариант. Вот что получится.

	Варианта			Сумма
	близко	недалеко	далеко	
Кратность	17	25	8	50
Частота, %	34	50	16	100

При такой грубой оценке мы кое-что утеряли из первоначальной информации. Например, теперь неизвестно количество работников, путь которых составляет именно 60 минут. Но мы что-то и приобрели: информация получила более ясное и удобное для объяснения представление. Вот как это выглядит, например, на круговой диаграмме (рис. 136).

Рис. 136

При графическом представлении больших объемов информации многоугольники распределения заменяют *гистограммами*, или *столбчатыми диаграммами*. Вы познакомитесь с ними в старшей школе.

4. Числовые характеристики данных измерения. Каждый человек, кроме своих формальных паспортных данных, обладает рядом других свойств и качеств. Кто-то лучше всех решает задачи, кто-то брюнет, кто-то замечательно играет на гитаре и т. п. Однако сравнительно небольшая паспортная информация (ФИО, дата рождения, номер и дата выдачи паспорта) позволяет однозначно определить человека, выделить его среди других. У данных измерений тоже есть своего рода краткий паспорт, состоящий из набора основных *числовых характеристик*. Поясним некоторые из них на уже знакомом нам примере измерения (И).

Разность между максимальной и минимальной вариантами называют *размахом измерения*. В измерении (И) размах равен $120 - 10 = 110$ минутам. На графике (см. рис. 134, 135) это длина области определения многоугольника распределения данных или распределения частот.

Ту варианту, которая в измерении встретилась чаще других, называют *модой измерения*. Если данные измерения уже собраны в двухстрочную таблицу распределения, то для нахождения моды следует:

— во второй строке (кратность) выбрать наибольшее число;

— от найденного числа подняться на клетку выше: полученное число и будет модой.

Если данные измерения представлены графически в виде многоугольника распределения, то мода — это точка, в которой достигается максимум многоугольника распределения. Например, в измерении (И) мода равна 50 минутам — наибольшее число работников (10) именно так оценивают время своего проезда.

Наиболее важной характеристикой числового ряда данных является *среднее значение (среднее арифметическое*, или просто *среднее)*.

Для нахождения среднего значения следует:

1) просуммировать все данные измерения;

2) полученную сумму разделить на количество данных.

Для подсчета среднего значения удобно использовать сгруппированный ряд данных. Вот как это выглядит в измерении (И).

Сгруппированный ряд данных измерения
$\underbrace{1, 1, 1}_{3},\ \underbrace{2, \ldots, 2}_{6},\ \underbrace{3, \ldots, 3}_{8},\ \underbrace{4, \ldots, 4}_{7},\ \underbrace{5, \ldots, 5}_{10},\ \underbrace{6, \ldots, 6}_{8},\ 8, 8,\ \underbrace{9, 9, 9}_{3},$ 10, 10, 12

Найдем среднее значение:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 8 + 8 \cdot 2 + 9 \cdot 3 + 10 \cdot 2 + 12 \cdot 1}{50} =$$

$$= \frac{3 + 12 + 24 + 28 + 50 + 48 + 16 + 27 + 20 + 12}{50} = 4{,}8$$ (десятков минут). Значит, среднее время проезда для опрошенных работников составляет 48 минут.

Если таблица распределения частот данных уже известна, то среднее значение можно вычислять прямо по ней. Смотрите:

$$\frac{1 \cdot 3 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 8 + \ldots + 12 \cdot 1}{50} = 1 \cdot \frac{3}{50} + 2 \cdot \frac{6}{50} + 3 \cdot \frac{8}{50} + \ldots + 12 \cdot \frac{1}{50}.$$

Все дроби в последней сумме — это частоты вариант, которые стоят перед этими дробями в качестве множителей. Значит, в таблице распределения частот можно просто перемножить числа в каждом столбце и затем сложить все полученные произведения.

	Варианта										Сумма
	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	
Частота	0,06	0,12	0,16	0,14	0,2	0,16	0,04	0,06	0,04	0,02	1

Проверяйте: $1 \cdot 0{,}06 + 2 \cdot 0{,}12 + 3 \cdot 0{,}16 + 4 \cdot 0{,}14 + 5 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}16 + 8 \cdot 0{,}04 + 9 \cdot 0{,}06 + 10 \cdot 0{,}04 + 12 \cdot 0{,}02 = 4{,}8$.

Сформулируем общее правило.

Для нахождения среднего значения данных измерения можно:
1) каждую варианту умножить на ее частоту;
2) сложить все полученные произведения.

Мы закончим этот параграф еще одним конкретным примером измерения, кратко повторив для него все шаги 1)—4) обработки данных (см. с. 183).

Пример 3. На вступительном письменном экзамене по математике можно получить от 0 до 10 баллов. Сорок абитуриентов получили такие оценки:

6	7	7	8	9	2	10	6	5	6
7	3	7	9	9	2	3	2	6	6
6	7	8	8	2	6	7	9	7	5
9	8	2	6	6	3	7	7	6	6

а) Составить общий ряд данных; упорядочить и сгруппировать полученные оценки.

б) Составить таблицы распределения данных и распределения частот.

в) Построить графики распределения данных и распределения частот.

г) Найти размах, моду и среднее измерения.

Решение. а) В принципе возможны такие оценки: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Это *общий ряд данных*. В конкретно предложенном измерении встретились только такие оценки: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Это *ряд данных*, все числа в нем — *варианты измерения*. Наконец,

$$\underbrace{2, \ldots, 2}_{5}, 3, 3, 3, 5, 5, \underbrace{6, \ldots, 6}_{11}, \underbrace{7, \ldots, 7}_{9}, \underbrace{8, \ldots, 8}_{4}, \underbrace{9, \ldots, 9}_{5}, 10 \text{ —}$$

это *сгруппированный ряд данных*.

б) Всего выставлено 40 оценок. Значит, 40 — это *объем* данного измерения. Соберем кратности всех восьми вариант в таблицу; подсчитаем и внесем в ту же таблицу все частоты.

	Варианта								Сумма
	2	3	5	6	7	8	9	10	
Кратность	5	3	2	11	9	4	5	1	40
Частота	0,125	0,075	0,05	0,275	0,225	0,1	0,125	0,025	1
Частота, %	12,5	7,5	5	27,5	22,5	10	12,5	2,5	100

Многоугольник распределения данных

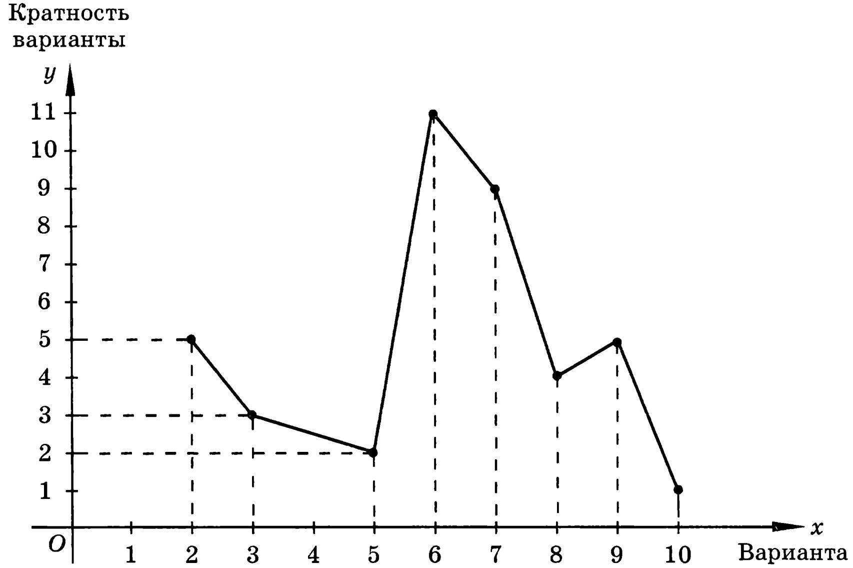


Рис. 137

Многоугольник распределения частот

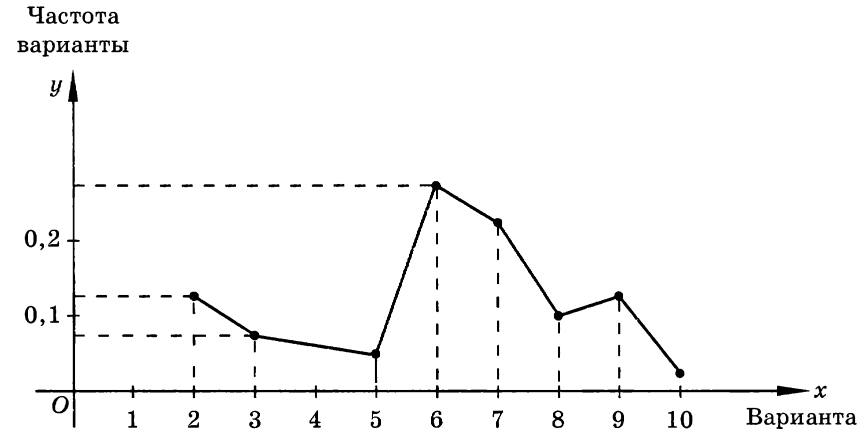


Рис. 138

Рис. 139

в) Полученная таблица распределения позволяет построить три многоугольника распределения: данных, частот и частот в процентах (рис. 137—139).

По существу, различия в этих графиках состоят только в выборе единиц измерения и масштаба по оси ординат.

г) Вернемся к первоначальным данным. *Размах* измерения равен $10 - 2 = 8$. *Мода* равна 6 — эта оценка встретилась чаще других. Наконец, вычислим *среднее значение:*

$$\frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 11 + 7 \cdot 9 + 8 \cdot 4 + 9 \cdot 5 + 10 \cdot 1}{40} =$$

$$= \frac{245}{40} = 6{,}125.$$ ■

§ 20. ПРОСТЕЙШИЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ЗАДАЧИ

С некоторыми комбинаторными задачами мы уже встречались в § 3 и 18. В каждой из них мы подсчитывали количество всевозможных комбинаций, которые тем или иным способом можно составить, исходя из условия конкретной задачи. Например, из цифр 1, 5, 9 можно составить ровно шесть трехзначных чисел без повторяющихся цифр: 159, 195, 519, 591, 915 и 951. А какую часть из них составляют, например, числа, кратные пяти? Видно, что из этих шести чисел только два числа делятся на пять: 195 и 915. Значит, числа, кратные пяти, составляют *одну треть* общего числа всех составленных чисел. В теории вероятностей говорят в этом случае так:

$\frac{1}{3}$ — *это вероятность того, что трехзначное число, составленное из неповторяющихся цифр 1, 5 и 9, будет кратно пяти.*

Рассмотрим еще несколько примеров, связанных с подобной ситуацией.

Пример 1. Из цифр 1, 5, 9 случайным образом составляют трехзначное число без повторяющихся цифр. Какова вероятность того, что получится число:

а) большее 500; б) квадратный корень из которого не больше 24; в) кратное трем; г) кратное девяти?

Решение.

а) Из шести возможных чисел 159, 195, 519, 591, 915, 951 первые два числа 159, 195 меньше 500, а последние четыре числа 519, 591, 915, 951 больше 500. Значит, числа, большие 500, составляют две трети $\left(\frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$ общего числа исходов и искомая вероятность равна $\frac{2}{3}$.

б) Так как $24^2 = 576$, то квадратные корни из чисел 159, 195, 519 меньше 24, а квадратные корни из чисел 591, 915, 951 больше 24. Значит, нужные нам числа составляют половину общего числа исходов и искомая вероятность равна $\frac{1}{2}$.

в) Сумма цифр каждого из шести чисел 159, 195, 519, 591, 915, 951 равна 15, т. е. делится на 3. Поэтому каждое из шести чисел кратно 3. Так как $\frac{6}{6} = 1$, то искомая вероятность равна 1.

г) Сумма цифр каждого из чисел равна 15, т. е. не делится на 9. Поэтому среди этих шести чисел вообще нет чисел, кратных 9. Так как $\frac{0}{6} = 0$, то искомая вероятность равна 0.

Ответ: а) $\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{2}$; в) 1; г) 0.

Проанализируем решение примера 1. В пункте в) ответ можно было получить, не выписывая и даже не подсчитывая все возможные трехзначные числа из цифр 1, 5, 9. Просто при перестановках цифр их сумма 15 не меняется, т. е. все числа будут кратны трем. Здесь мы имеем дело с *достоверным событием*. Оно произойдет при любом способе составления трехзначного числа из цифр 1, 5, 9 без повторяющихся цифр. В пункте г) никакое из чисел, которые вообще можно составить из цифр 1, 5, 9, не делится на 9. Здесь мы встретились с *невозможным событием*. Оно никогда не произойдет при составлении трехзначного числа из цифр 1, 5, 9 без повторений. В пунктах а) и б) интересующие нас события могли как произойти, так и не произойти при случайном составлении трехзначного числа. Такие события называют *случайными*.

Простейший и, наверное, наиболее известный источник случайных событий — это игра «Орлянка»: монетку подбрасывают и смотрят, какая из ее сторон, «орел» или «решка», выпадет.

Обратите внимание на новые термины: случайное событие, достоверное событие, невозможное событие.

Пример 2. Монету подбрасывают три раза. Какова вероятность того, что:

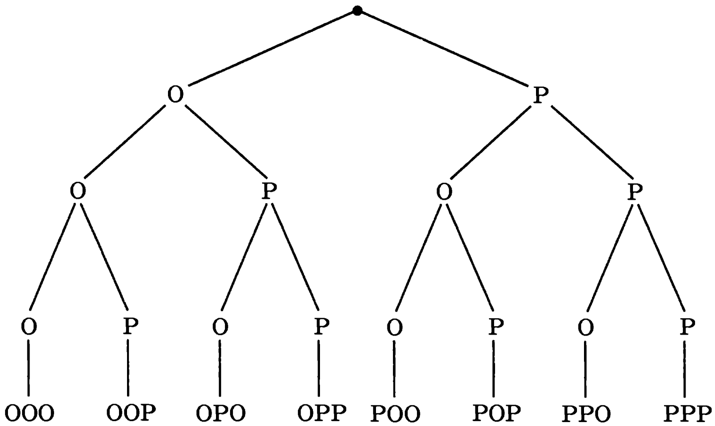
а) все три раза выпадет «решка»; б) «решка» выпадет в два раза чаще, чем «орел»; в) «орел» выпадет в три раза чаще, чем «решка»; г) при первом и третьем подбрасывании результаты будут различны?

Решение. Составим дерево вариантов, обозначив О — выпадение «орла» и Р — выпадение «решки» (рис. 140). Мы видим, что всего возможны восемь исходов: ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР.

а) «Решка» выпадет три раза только в одном из восьми исходов. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{8} = 0{,}125$.

б) Из восьми возможных исходов только в трех случаях «решка» выпадет в два раза чаще, чем «орел»: РРО, РОР, РРО. Значит, искомая вероятность равна $\frac{3}{8} = 0{,}375$.

в) Если «решка» выпала хоть раз, то «орлов» должно быть не менее трех. Но тогда подбрасываний будет никак не меньше четырех, а их по условию всего три. Значит, указанное событие невозможно. Впрочем, можно просто перебрать все восемь возможных



Всего: 8 исходов

Рис. 140

исходов и увидеть, что ни один из них не подходит. Итак, искомая вероятность равна 0.

г) Из восьми возможных исходов интересующее нас событие произойдет в следующих четырех случаях: OOP, OPP, POO, PPO. Значит, искомая вероятность равна $\frac{4}{8} = 0{,}5$.

О т в е т: а) 0,125; б) 0,375; в) 0; г) 0,5.

В реальности монетка может не только упасть на одну из своих сторон, но и прислониться к стене или ножке стула, может укатиться довольно далеко, ее может кто-то схватить и убежать и т. п. Ясно, что при подсчетах вероятностей невозможно или, по крайней мере, очень сложно учесть подобные случаи. Поэтому заранее договариваются, что при подбрасывании монетки возможны только два случая — «орел» или «решка» и, более того, что эти случаи *равновозможны* между собой. Это означает, что вероятность выпадения «орла» при одном подбрасывании монетки заранее *предполагается равной* $\frac{1}{2}$ и соответственно вероятность выпадения «решки» при одном подбрасывании монетки также *предполагается равной* $\frac{1}{2}$. Получается некая «идеальная» монетка, или простейшая *вероятностная модель* реальных монет.

Различие тут примерно такое же, как между реальным автомобилем и машиной, которая, как это бывает в текстовых задачах, на протяжении нескольких часов едет с постоянной скоростью по прямолинейному шоссе. Конечно же, и прямолинейность шоссе, и равномерность движения, да и просто «расстояние между пунктами А и Б» — это только *модели* реальных ситуаций. Однако для простейших, первоначальных подсчетов как раз и нужны простые модели: ведь действовать в сложных моделях намного сложнее!

Итак, мы приходим к следующему способу подсчета вероятности случайного события. Специально подчеркнем, что этот способ применим *только* в тех случаях, когда все исходы некоторого испытания *равновозможны*.

КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТНАЯ СХЕМА

Для нахождения вероятности случайного события А при проведении некоторого испытания следует:

1) найти число N всех возможных исходов данного испытания;

2) найти количество N(A) тех исходов испытания, в которых наступает событие А;

3) найти частное $\frac{N(A)}{N}$; *оно и будет равно вероятности события А.*

Принято вероятность события A обозначать $P(A)$ (объяснение такого обозначения очень простое: «вероятность» по-французски — *probabilité*, по-английски «вероятно» — *probably*). Итак,

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N}.}$$

Довольно часто пункты 1)—3) приведенной классической вероятностной схемы выражают одной довольно длинной фразой.

КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Вероятностью события А при проведении некоторого испытания называют отношение числа тех исходов, в результате которых наступает событие А, к общему числу всех (равновозможных между собой) исходов этого испытания.

В частности, если событие A *невозможно* при проведении некоторого испытания, то $N(A) = 0$ и поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{0}{N} = 0$. Напротив, *достоверность* события A при проведении некоторого испытания означает, что $N(A) = N$ и поэтому $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{N}{N} = 1$.

Пример 3. В правильном девятиугольнике $ABCDEFGKL$ случайным образом провели одну из диагоналей. Какова вероятность того, что:

а) по обе стороны от нее лежит одинаковое количество вершин;

б) по одну сторону от диагонали будет лежать более двух вершин;

в) диагональ отрезает от девятиугольника какой-то треугольник;

г) один из концов диагонали — вершина L или вершина D?

Решение.

а) Вне любой диагонали лежит семь вершин. Так как 7 — число нечетное, то по обе стороны не может лежать одинаковое количество вершин. Значит, это невозможное событие, его вероятность равна 0.

б) Если по одну сторону от диагонали лежит одна вершина, то по другую сторону — шесть вершин; если по одну сторону лежат две вершины, то по другую сторону — пять вершин (рис. 141а); наконец, если по одну сторону лежат три вершины, то по другую — четыре (рис. 141б). Мы видим, что в любом случае хотя бы с одной стороны лежит более двух вершин. Значит, мы имеем дело с достоверным событием, его вероятность равна 1.

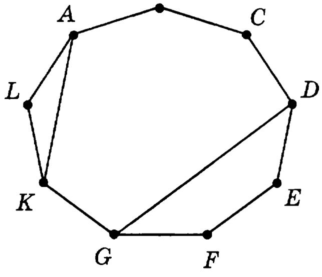


Рис. 141а

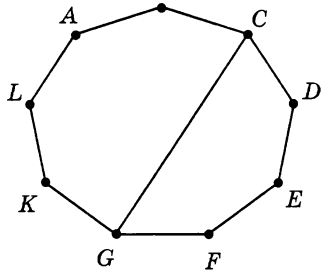


Рис. 141б

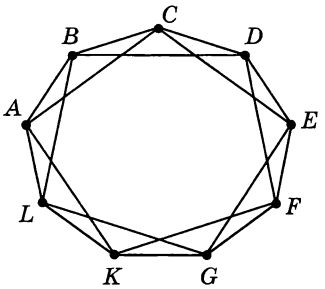


Рис. 142

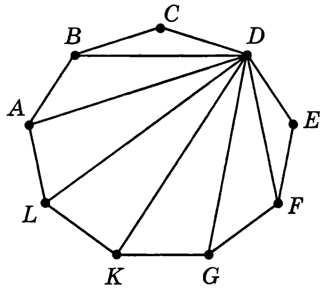


Рис. 143

в) Сначала придется посчитать количество N всех диагоналей. Начало диагонали можно выбрать девятью способами, а конец — шестью способами: ведь при уже выбранном начале диагональ нельзя провести ни в эту вершину, ни в две соседние вершины. По правилу умножения получается $9 \cdot 6 = 54$ диагонали. Но при таком подсчете каждую диагональ, например DG, мы посчитали дважды: как диагональ с началом в D и концом в G и как диагональ с началом в G и концом в D (см. рис. 141а). Значит, всего проведено $N = 54 : 2 = 27$ диагоналей.

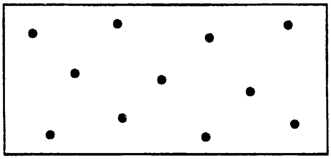
Диагонали, отрезающие треугольники, — это AC, BD, CE, DF, EG, FK, GL, KA, BL (рис. 142). Их девять — столько, сколько вершин у $ABCDEFGKL$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{9}{27} = \frac{1}{3}$.

г) Из вершины D можно провести шесть диагоналей (рис. 143) и из вершины L — столько же. Получается 12 диагоналей, но одну из них, а именно диагональ LD, мы посчитали дважды. Остальные десять диагоналей посчитаны по одному разу. Значит, интересующее нас событие произойдет в 11 случаях, а потому искомая вероятность равна $\frac{11}{27}$.

Ответ: а) 0; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; г) $\frac{11}{27}$.

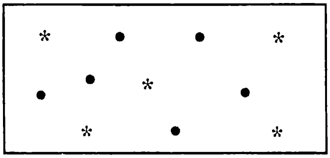
Имеется тесная связь между, с одной стороны, множествами, их элементами и подмножествами и, с другой стороны, испытаниями (опытами, экспериментами), их исходами и случайными событиями.

Допустим, вы каким-то образом перечислили все N возможных исходов некоторого опыта, испытания, эксперимента. Может быть, вы выписали эти исходы в одну строку, через запятую.



Всего: N исходов

Рис. 144а



Из них: $N(A)$ благоприятствующих событию A

Рис. 144б

Может быть, каждый исход записали в отдельную строку и строки пронумеровали. Может быть, вы изобразили исходы какими-то значками на листе бумаги или разместили их под разными ярлычками на экране монитора и т. п. Важно, что все N исходов вы рассмотрели как единое множество, перечисленное поэлементно (рис. 144а).

Теперь вас интересует вероятность некоторого случайного события A, которое может произойти, а может и не произойти в результате проведенного испытания. Это означает, что событие A происходит при наступлении *только некоторых* из всех возможных N исходов. Отметим их (звездочки на рис. 144б). Тогда в вашем списке всех исходов возникает некоторое подмножество, состоящее из $N(A)$ элементов.

Получается, что случайное событие A — это просто подмножество множества всех исходов, а вероятность события A — это доля исходов, *благоприятствующих* A, среди множества всех N возможных исходов. В частности, вероятность каждого отдельного исхода равна $\frac{1}{N}$, т. е. все они равновероятны.

В нижеприведенной таблице мы показываем связь между терминами теории вероятностей и теории множеств.

Испытание с N исходами	**Множество из N элементов**
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества

Оба столбца в этой таблице могут быть продолжены: новых понятий и в теории вероятностей, и в теории множеств хватает. Как при этом «переходить» по строчкам — весьма сложный вопрос. Мы ограничимся только небольшим продвижением и начнем, как обычно, с примера.

Пример 4. 17 точек из 50 покрашены в синий цвет, а 13 точек из оставшихся покрашены в оранжевый цвет. Какова вероятность того, что случайным образом выбранная точка окажется: а) синей; б) не оранжевой; в) окрашенной; г) неокрашенной?

Решение.

а) $P = \dfrac{N(\textit{синие точки})}{N} = \dfrac{17}{50} = 0{,}34.$

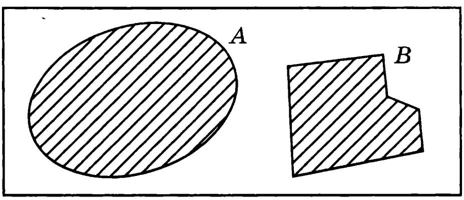
б) $P = \dfrac{N(\textit{не оранжевая точка})}{N} = \dfrac{50 - 13}{50} = 0{,}74.$

в) $P = \dfrac{N(\textit{синяя или оранжевая точка})}{N} = \dfrac{17 + 13}{50} = 0{,}6.$

г) $P = \dfrac{50 - (17 + 13)}{50} = 0{,}4.$ ■

Определение. Событие B называют **противоположным** событию A, если событие B происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие A; обозначение: $B = \bar{A}$. События A и B называют **несовместными**, если они не могут происходить одновременно.

Несовместные события изображаются непересекающимися подмножествами множества всех исходов испытания (рис. 145).



A и B несовместны

Рис. 145

Типичный пример несовместных событий: любое событие A и противоположное событие $\bar{A}$.

Доказательство следующей теоремы, по существу, повторяет решение примера 4в).

Теорема 1 | ***Если события A и B несовместны, то вероятность того, что наступит или A, или B, равна $P(A) + P(B)$.***

Доказательство. Обозначим буквой C интересующее нас событие. Событие C наступает тогда и только тогда, когда происходит *хотя бы одно из событий A или B*. Так как A и B несовместны, то $N(C) = N(A) + N(B)$. Разделим обе части этого равенства почленно на N — число всех возможных исходов испытания. Получим:

$$P(C) = \frac{N(C)}{N} = \frac{N(A) + N(B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N} = P(A) + P(B).$$

Теорема доказана.

Для того чтобы теорему 1 записать с использованием формул, нужно как-то назвать и обозначить событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из двух данных событий A и B. Такое событие называют *суммой* событий A и B и обозначают $A + B$. При переводе операции сложения случайных событий на язык теории множеств получается операция объединения множеств: соотношение $x \in A \cup B$ как раз и означает, что или $x \in A$, или $x \in B$.

Итак, вот краткая формулировка теоремы 1:

Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Теорема 2 | ***Для нахождения вероятности противоположного события следует из единицы вычесть вероятность самого события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.***

Доказательство. Событие $A + \bar{A}$ достоверно: при любом исходе испытания происходит либо событие A, либо событие $\bar{A}$. Значит, $P(A + \bar{A}) = 1$. Событие A и противоположное событие $\bar{A}$ несовместны. Значит, $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$. Поэтому $1 = P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A})$ и $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Теорема доказана.

Довольно часто удобно использовать и симметричную формулу $P(A) = 1 - P(\bar{A})$. Это бывает в тех случаях, когда посчитать вероятность противоположного события проще, чем найти вероятность самого события. Типичной ситуацией являются события, описание которых использует оборот «хотя бы один раз» или аналогичный ему.

Пример 5. Какова вероятность того, что при трех последовательных бросаниях игрального кубика хотя бы один раз выпадет 6?

Решение. При одном бросании кубика равновозможны выпадения 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. При втором бросании, вне зависимости от исхода предыдущего бросания, возможны те же результаты. Для трех бросаний по правилу умножения получаем, что всего возможно $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ исходов. Обозначим буквой A интересующее нас событие, т. е. выпадение хотя бы одной шестерки. В чем же состоит противоположное событие $\bar{A}$? Оно означает, что шестерка вообще не выпадет ни в первый, ни во второй, ни в третий раз. Но тогда все три раза на кубике выпадет одна из пяти цифр 1, 2, 3, 4 или 5. Применим еще раз правило умножения и найдем, что $N(\bar{A}) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Значит, $P(\bar{A}) = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787$ и $P(A) = 1 - P(\bar{A}) \approx 0{,}4213$. ■

Мы познакомились с вероятностными задачами, в которых множество исходов можно тем или иным способом подсчитать. Другими словами, множество N всех возможных исходов *конечно*. Но встречаются испытания и с *бесконечным* множеством исходов. К ним классическая вероятностная схема уже неприменима. Рассмотрим пример.

Пример 6. Случайным образом выбирают одно из решений неравенства $|x - 1| \leqslant 3$. Какова вероятность того, что оно окажется и решением неравенства $|x - 2| \geqslant 3$?

Решение. Разумеется, следует для начала решить оба неравенства. Вспомним геометрический смысл модуля разности $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b числовой прямой. Поэтому неравенство $|x - 1| \leqslant 3$ означает, что расстояние между точками x и 1 не больше 3. Значит, $[-2; 4]$ — решение этого неравенства. Отметим этот отрезок длиной 6 штриховкой (рис. 146а).

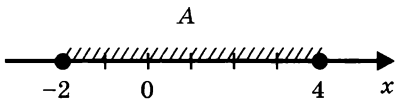


Рис. 146а

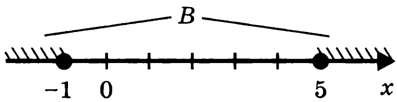


Рис. 146б

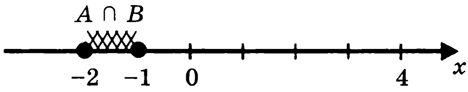


Рис. 146в

Второе неравенство $|x - 2| \geqslant 3$ означает, что расстояние между точками x и 2 не меньше 3. Значит, $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$ — решение этого неравенства (рис. 146б). Отметим это множество другой штриховкой. В пересечении получится отрезок $[-2; -1]$ (рис. 146в).

Мы видим, что из всех решений неравенства $|x - 1| \leqslant 3$ только *одну шестую часть* составляют решения неравенства $|x - 2| \geqslant 3$. Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{6}$. ◼

П р и м е р 7. Графический редактор, установленный на компьютере, случайно отмечает одну точку на мониторе — квадрате $ABCD$ со стороной 12 см. Какова вероятность того, что эта точка:

а) окажется в верхней половине монитора;

б) окажется одновременно в нижней и в левой половинах монитора;

в) будет удалена от вершины D не более чем на 11 см;

г) будет ближе к центру монитора, чем к вершине C?

Р е ш е н и е. а) Площадь всего монитора равна 144 см^2. Площадь верхней половины монитора равна 72 см^2. Значит, искомая вероятность равна $\frac{72}{144} = 0{,}5$ (рис. 147а).

б) В этом случае редактор может отметить любую точку из левой нижней четверти монитора (рис. 147б). Поэтому вероятность указанного события равна 0,25.

в) Нарисуем круг радиусом 11 см с центром в точке D. В пересечении с квадратом $ABCD$ получится четверть этого круга (рис. 147в), ее площадь равна $\frac{1}{4}\pi \cdot 11^2$, т. е. $30{,}25\pi$. Выясним, какую часть найденная площадь составляет от площади всего монитора:

$$\frac{30,25\pi}{144} \approx \frac{30,25 \cdot 3,14}{144} = \frac{94,985}{144} \approx 0,66.$$

Отношение площадей как раз и дает искомую вероятность.

г) Соединим отрезком вершину C с центром O монитора. К этому отрезку построим серединный перпендикуляр m. Его точки равноудалены от точек C и O, а точки, лежащие выше m, находятся ближе к C, чем к центру O. Пусть $K = m \cap BC$, $L = m \cap CD$ и $M = m \cap OC$. Тогда ΔKCL состоит из всех точек монитора, которые удалены от C не дальше, чем от центра монитора (рис. 147г).

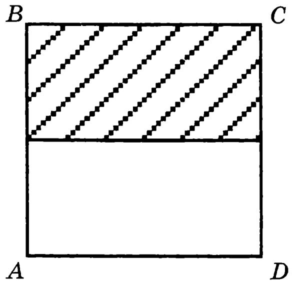


Рис. 147а

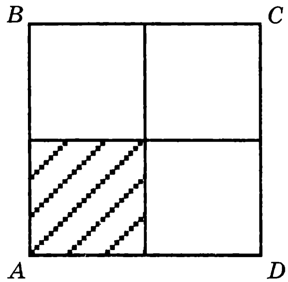


Рис. 147б

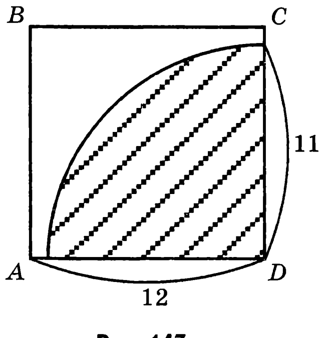


Рис. 147в

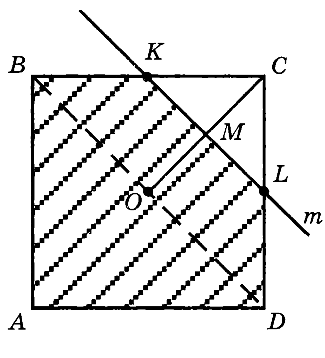


Рис. 147г

Имеем: $BD = 12\sqrt{2}$, $KL = \frac{1}{2}BD$ (средняя линия треугольника $BCD) = 6\sqrt{2}$, $MC = \frac{1}{2}CO = \frac{1}{4}BD = 3\sqrt{2}$. Значит, $S_{\Delta KCL} = \frac{1}{2}KL \cdot MC = $ $= \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 18$.

Так как площадь S всего монитора равна 144 см², то вероятность выбора точки из ΔKCL равна $\frac{S_{KCL}}{S} = \frac{18}{144} = 0{,}125$.

По условию нам следует найти вероятность события, противоположного попаданию в ΔKCL. По формуле $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ получаем искомую вероятность: $1 - 0{,}125 = 0{,}875$.

О т в е т: а) 0,5; б) 0,25; в) $\approx$ 0,66; г) 0,875.

Сформулируем общее правило для нахождения геометрических вероятностей. *Если площадь $S(A)$ фигуры A разделить на площадь $S(X)$ фигуры X, которая целиком содержит фигуру A, то получится вероятность того, что точка, случайно выбранная из фигуры X, окажется в фигуре A:* $P = \frac{S(A)}{S(X)}$.

Аналогично поступают и с множествами на числовой прямой, и с пространственными телами. Но в этих случаях площади следует заменить или на длину числовых множеств, или на объемы пространственных тел.

§ 21. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ И ВЕРОЯТНОСТИ СОБЫТИЙ

В заключительном параграфе главы 5 мы расскажем о связи между вероятностями случайных событий (§ 20) и экспериментальными статистическими данными (§ 19). Напомним, что статистические данные, как правило, представляют собой данные какого-либо конкретного измерения, проведенного *в реальности*, а при вычислении вероятностей случайных событий мы имеем дело с той или иной *моделью реальности*. Как же связаны между собой реальность и модель реальности? Насколько точно наши теоретические представления об окружающем мире соответствуют тому, что происходит на практике?

Рассмотрим конкретный пример, связанный с наиболее известным источником случайных событий — подбрасыванием монетки.

Пример 1. На практических занятиях по обработке данных каждый из 20 школьников подбросил рублевую монетку 50 раз, подсчитал количество k выпадений «орла» и записал это количество в процентах от общего числа бросаний. Полученные данные были собраны в таблицу.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
k	24	27	23	26	28	25	24	25	26	22	23	23	22	26	27	24	23	29	30	21
%	48	54	46	52	56	50	48	50	52	44	46	46	44	52	54	48	46	58	60	42

Мы видим, что встретились достаточно разбросанные результаты: от 21 до 30. Если частоту появления «орла» перевести в проценты, то получатся результаты от 42 до 60%. С одной стороны, *ровно половина* (25) от числа всех бросаний получилась только в двух случаях. Но с другой стороны, отклонения остальных результатов от 25 не так уж и велики: самое большое отклонение равно 5, т. е. составляет 10% от общего количества бросаний монетки. Объединим полученные результаты в более крупные группы. Будем считать, что сумма результатов № 1 и № 2 — это один результат для 100 бросаний, сумма результатов № 3 и № 4 — это второй результат для 100 бросаний и т. п. Получим новую таблицу.

№	1–2	3–4	5–6	7–8	9–10	11–12	13–14	15–16	17–18	19–20
k	51	49	53	49	48	46	48	51	52	51

Перевод в проценты тут можно не делать: ведь появление 51 «орла» при 100 бросаниях как раз и означает появление «орла» в 51% случаев от общего числа бросаний. Теперь *ровно половина* от 100 бросаний вообще не встретилась, но зато отклонения от этой половины в процентном измерении уменьшились и составляют уже не более 4%. Продолжим укрупнение. Посмотрим, что выйдет при группировке по 200 бросаний.

№	1–4	5–8	9–12	13–16	17–20
k	100	102	94	99	103
%	50	51	47	49,5	51,5

Мы видим, что при увеличении количества бросаний монетки частота появления «орла» приближается к половине от общего числа бросаний. Особенно это заметно, если рассмотреть все проведенные бросания монетки — все повторения одного и того же простейшего эксперимента со случайным исходом. Всего в проведенной $20 \cdot 50 = 1000$ бросаний монетки «орел» появился в 498 случаях:

$$100 + 102 + 94 + 99 + 103 = 500 + (0 + 2 - 6 - 1 + 3) = 498.$$

Процентная частота появления «орла», таким образом, равна 49,8%, и отклонение от половины, т. е. от 50%, составляет только 0,2%. ◼

Вообще проведение заметного числа экспериментов показывает, что частота выпадения «орла» при достаточно большом числе бросаний практически неотличима от 0,5, или от 50%. Например, в большинстве учебников по статистике или по теории вероятностей приводят результаты экспериментов французского ученого Ж. Бюффона (XVIII в.) и английского математика К. Пирсона (конец XIX в.). Они бросали монету соответственно 4040 и 24 000 раз, и «орел» выпал 2048 и 12 012 раз. Если посчитать частоту выпадения «орла», то получится $\frac{2048}{4040} = 0{,}50693...$ у Бюффона и $\frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005$ у Пирсона.

Определение. При неограниченном увеличении числа независимых повторений одного и того же опыта в неизменных условиях практически достоверно, что частота появления фиксированного случайного события сближается с некоторым постоянным числом. Это явление называют **статистической устойчивостью**, а указанное число — **статистической вероятностью события.**

Подчеркнем, что для каждого конкретного числа повторений опыта частота появления события скорее всего отличается от вероятности события. Явление статистической устойчивости гарантирует лишь, что с увеличением числа повторений опыта вероятность заметного отличия частоты события от его вероятности стремится к нулю.

Такая устойчивость имеет место не только для бросаний монетки, но и для вытаскивания карт, выпадения определенного числа очков на игральных кубиках, определения среднесуточной температуры и вообще для большинства случайных событий. Явление статистической устойчивости соединяет реально проводимые, *эмпирические* испытания с теоретическими моделями этих испытаний.

Пример 2. Статистические исследования большого количества литературных текстов показали, что частоты появления той или иной буквы (или пробела между словами) стремятся при увеличении объема текста к некоторым определенным константам. Таблицы, в которых собраны буквы того или иного языка и соответствующие константы, называют *частотными таблицами* языка. Приведем таблицу встречаемости букв русского языка (частоты приведены в процентах).

Буква	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й
Частота	6,2	1,4	3,8	1,1	2,5	7,2	0,7	1,6	6,2	1,0
Буква	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф
Частота	2,8	3,5	2,6	5,3	9,0	2,3	4,0	4,5	5,3	2,1	0,2
Буква	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ы	Ь	Э	Ю	Я	–
Частота	0,9	0,4	0,4	0,6	0,3	1,6	1,4	0,3	0,6	1,8	17,5

У каждого автора есть своя частотная таблица использования букв, слов, специфических литературных оборотов и т. п. По этой частотной таблице можно определять автора примерно так же, как и по отпечаткам пальцев. Вот два примера из нашей недавней истории. До сегодняшнего дня не утихают споры об авторстве «Тихого Дона». Многие считают, что в 23 года такую глубокую и воистину великую книгу М. А. Шолохов написать просто не мог. Выдвигались разные аргументы и разные кандидаты в авторы. Особенно жаркими были споры в момент присуждения ему Нобелевской премии по литературе (1965). Статистический анализ текстов и сличение с текстами, где авторство М. А. Шолохова не вызывало сомнений, подтвердили все же гипотезу о нем как об истинном авторе «Тихого Дона».

Вторая история носит политический характер. В начале 60-х годов «на Западе», как говорили тогда в СССР, опубликовали литературные произведения, «очерняющие прогрессивный характер социалистической системы...». Автором являлся А. Терц, и это был, вне всякого сомнения, псевдоним. В соответствующих органах провели сравнительный анализ опубликованных «вредительских» текстов и результаты сличили с имеющимися текстами ряда возможных кандидатов в авторы. Так было установлено, что настоящим автором является литературовед Андрей Донатович Синявский. Он, в общем-то, в итоге и не отпирался, и на суде в 1966 году («Процесс Синявского и Даниэля») получил семь лет наказания в колонии общего режима. Вот такая статистика.

Приведем пример использования статистики при расшифровке закодированных текстов. Один из первых известных способов шифровки текстовых сообщений состоит в следующем. Каждую букву алфавита языка, на котором пишется сообщение, заменяют какой-то другой буквой этого же алфавита. Получается *перестановка* букв алфавита. Например:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	И	К	Л	М	Н	О	...	Я
Я	Ы	Ё	Ж	З	М	Ф	Щ	О	Ю	Р	Т	С	Ч	Ш		А

Тогда словосочетание «милая мама» после шифровки будет выглядеть так: «сютяа сяся». Адресат послания, у которого есть таблица перестановки букв, без труда сможет провести обратный перевод загадочного слова «тшжюря». Если же послание перехвачено, а шифровальный код неизвестен, то при расшифровке может помочь статистика. Допустим, что текст послания достаточно большой. Например, около страницы машинописного текста. Получится 30—40 строчек по 60—70 букв, т. е. всего около 2000 «шифрованных» букв. Составим для них частотную таблицу встречаемости в тексте шифровки и сравним ее с таблицей встречаемости «настоящих» букв русского алфавита (см. выше). Если для какой-то буквы, скажем для Й, подсчитанная частота превысит 9%, то с заметной долей уверенности можно утверждать, что этой буквой зашифрована буква О первоначального текста. Если же частота буквы, скажем М, в шифровке оказалась равной примерно 7%, то скорее всего это шифр буквы Е. Конечно, так получится только приблизительная расшифровка, потому что, скажем, буквы А и И или Ц и Ч неразличимы по частоте встречаемости. Но потом можно будет учесть грамматику русского языка, таблицы встречаемости не только букв, но и устойчивых сочетаний букв (СТ, ПРО), союзы, предлоги, общий смысл послания и т. п. и в итоге успешно расшифровать имеющийся текст.

Такой статистический метод работает и при замене букв алфавита произвольными значками, например:

А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З	...	Я
W	{	пробел	!	Q	∅	;	©	@		§

Явление статистической устойчивости позволяет приблизительно оценивать вероятности событий даже в тех случаях, когда эти вероятности мы заранее не знаем. Действительно, пусть требуется найти или оценить вероятность события A при проведении некоторого испытания. Будем проводить независимые повторения этого испытания в неизменных условиях. Отметим те из повторений, в которых наступило интересующее нас событие A, и подсчитаем частоту наступления события A.

Статистическая устойчивость означает, что при проведении большого числа повторений испытания подсчитанная частота практически совпадет с неизвестной нам вероятностью наступления события A. Значит, найденная частота приблизительно равна вероятности события A. Следует только точно понимать, что частоту наступления мы подсчитываем для *реальных* событий, а вероятность — для *теоретической модели* этих событий.

Пример 3. Каждый из десяти игроков 50 раз подряд повторил одновременные бросания трех игральных костей различного цвета и подсчитал количество k тех бросаний, в которых не выпала шестерка. Получились такие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	28	32	24	30	31	25	29	29	27	28

а) Составить таблицу частот (в процентах) невыпадения шестерки для каждого игрока.

б) Составить таблицу частот (в процентах) невыпадения шестерки для результатов игроков 1—2, 3—4, ..., 9—10.

в) Какова частота невыпадения шестерки для всех 500 проведенных бросаний?

г) Найти вероятность невыпадения шестерки при бросании трех игральных костей.

Решение.

а)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
k	28	32	24	30	31	25	29	29	27	28
%	56	64	48	60	62	50	58	58	54	56

б)

№	1–2	3–4	5–6	7–8	9–10
%	60	54	56	58	55

в) Всего из 500 проведенных бросаний шестерка отсутствовала в 283 случаях. Значит, частота равна $\frac{283}{500} = 0{,}566$, или 56,6%.

г) Проведем подсчет по классической вероятностной схеме. По правилу умножения при бросании трех различных игральных костей возможно $N = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ равновозможных исходов. Пусть A — событие, состоящее в невыпадении шестерки. Это значит, что для каждой кости есть только пять равновозможных исходов: 1, 2, 3, 4, 5. Снова по правилу умножения получаем, что $N(A) = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Значит,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{125}{216} \approx 0{,}5787.$$

Итак, мы видим, что *теоретическая* вероятность невыпадения шестерки, вычисленная по классической вероятностной *модели,* составляет примерно 57,9%, а статистическая частота, вычисленная *практически*, равна 56,6%. Расхождение, конечно, имеется, но не слишком существенное. ◼

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

- Вы познакомились с основными методами решения простейших комбинаторных задач:
  перебор вариантов;
  построение дерева вариантов;
  правило умножения.

- Мы ввели новое понятие: факториал.

- Вы познакомились с новой математической моделью, которая служит описанием многих вероятностных задач, — классической вероятностной схемой. Для подсчета вероятности в этой модели используется формула $P(A) = \frac{N(A)}{N}$.

- Вы узнали об основных видах случайных событий:
  достоверное и невозможное события;
  несовместные события;
  событие, противоположное данному событию;
  сумма двух случайных событий.

- Мы доказали три теоремы:
  о числе перестановок множества, состоящего из n элементов: $P_n = n!$;
  о вероятности суммы двух несовместных событий;
  о вероятности противоположного события.

- Мы обсудили простейшие методы статистической обработки результатов измерений, полученных при проведении того или иного эксперимента.

- Вы узнали новые понятия и термины:
  общий ряд данных и ряд данных конкретного измерения;
  варианта ряда данных, ее кратность, частота и процентная частота;
  сгруппированный ряд данных;
  многоугольники распределения.

- Вы познакомились с простейшими <u>числовыми характеристиками</u> информации, полученной при проведении эксперимента, которые образуют своего рода паспорт результатов этого эксперимента:

  объем,

  размах,

  мода,

  среднее.

ПРИМЕРНОЕ ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

3 ч в неделю, всего 102 ч в год

Изучаемый материал		Кол-во часов
Глава 1. НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ НЕРАВЕНСТВ		
§ 1.	Линейные и квадратные неравенства	3
§ 2.	Рациональные неравенства	5
§ 3.	Множества и операции над ними	3
§ 4.	Системы рациональных неравенств	4
	Контрольная работа № 1	1
	Итого:	16
Глава 2. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ		
§ 5.	Основные понятия	4
§ 6.	Методы решения систем уравнений	5
§ 7.	Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций	5
	Контрольная работа № 2	1
	Итого:	15
Глава 3. ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ		
§ 8.	Определение числовой функции. Область определения, область значений функции	4
§ 9.	Способы задания функций	2
§ 10.	Свойства функций	4
§ 11.	Четные и нечетные функции	3
	Контрольная работа № 3	1
§ 12.	Функции $y = x^n$ $(n \in N)$, их свойства и графики	4
§ 13.	Функции $y = x^{-n}$ $(n \in N)$, их свойства и графики	3

Окончание табл.

Изучаемый материал		Кол-во часов
§ 14.	Функция $y = \sqrt[3]{x}$, ее свойства и график	3
	Контрольная работа № 4	1
	Итого:	25
	Глава 4. ПРОГРЕССИИ	
§ 15.	Числовые последовательности	4
§ 16.	Арифметическая прогрессия	5
§ 17.	Геометрическая прогрессия	6
	Контрольная работа № 5	1
	Итого:	16
	Глава 5. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	
§ 18.	Комбинаторные задачи	3
§ 19.	Статистика — дизайн информации	3
§ 20.	Простейшие вероятностные задачи	3
§ 21.	Экспериментальные данные и вероятности событий	2
	Контрольная работа № 6	1
	Итого:	12
	Итоговое повторение	17
	Итоговая контрольная работа	1

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Р

С

У

Ф

Ч

Э

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Мордкович Александр Григорьевич,
Семенов Павел Владимирович

АЛГЕБРА

9 класс

В двух частях

Часть 1

УЧЕБНИК
для учащихся общеобразовательных учреждений

Генеральный директор издательства *М. И. Безвиконная*
Главный редактор *К. И. Куровский*
Редактор *С. В. Бахтина*
Оформление и художественное редактирование: *Т. С. Богданова*
Технический редактор *И. Л. Ткаченко*
Корректоры *Л. В. Яковлева, Л. А. Ключникова*
Компьютерная верстка и графика: *Т. В. Батракова, А. А. Горкин*

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.003577.04.09 от 06.04.2009.
Подписано в печать 15.06.09. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 14,0. Тираж 200 000 экз. Заказ № 29663.

Издательство «Мнемозина». 105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел.: 8 (499) 367 5418, 367 5627, 367 6781; факс: 8 (499) 165 9218.
E-mail: ioc@mnemozina.ru www.mnemozina.ru

Магазин «Мнемозина»
(розничная и мелкооптовая продажа книг, «КНИГА — ПОЧТОЙ»).
105043, Москва, ул. 6-я Парковая, 29 б.
Тел./факс: 8 (495) 783 8284; тел.: 8 (495) 783 8285.
E-mail: magazin@mnemozina.ru

Торговый дом «Мнемозина» (оптовая продажа книг).
Тел./факс: 8 (495) 665 6031 (многоканальный). E-mail: td@mnemozina.ru

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством
электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru