ГОУ СПО
«Тираспольский колледж бизнеса и сервиса»

Спецкурс по высшей математике. Линейная алгебра

Учебное пособие.
Часть I

Тирасполь 2016 г.

УДК 512.643
ББК В22.143

Авторы:
М, А. Криворученко

Рецензенты:
Е. Г. Шинкаренко, к. п. н., доцент кафедры алгебры, геометрии и методики преподавания математики ПГУ им. Т.Г. Шевченко

Е.П. Решитко, преп. высшей категории, ГОУ СПО «ТКБиС».

Спецкурс по высшей математике. Линейная алгебра. Учебное пособие / Сост. М.А. Криворученко.– Тирасполь, 2016. – 31 с.

В пособии рассматриваются основные теоретические положения линейной алгебры, имеющие практическое приложение в экономике. Оно содержит 13 разобранных примеров решения экономических задач. Даются упражнения, которые могут быть использованы для самостоятельной работы.

Пособие написано в соответствие с программой «Математика», изучаемой студентами 1-го курса экономических специальностей СПО.

Рекомендовано РМО преподавателей математики

Введение

Как известно, математику надо изучать последовательно. Прежде всего студенты должны усвоить основные определения и важнейшие формулы, которые составят фундамент их знаний по высшей математике.

Пособие состоит из 4-ех параграфов. Первые три – теоретико-практические, четвертый – индивидуальные задания. В конце каждого параграфа предложены контрольные вопросы для самопроверки и упражнения на закрепление теоретического материала. Требования к освоению материала каждого параграфа сформулированы в рубрике «Личный результат». Ориентируясь на них обучающийся сможет осуществить самоконтроль и оценить свои знания.

Матричная алгебра широко используется при решении экономических задач. В пособии рассматривается теоретический и практический материал, который иллюстрируется на экономических примерах. Он необходим студентам для дальнейшего изучения методов решения экономических задач.

Условные обозначения:

 – окончание разбора примера

 – задачи с экономическим содержанием

 – определение

 – важная информация

Математика полезна тем, что она трудна.
Александр Данилович Александров

§1 Матрицы

Определение: Система из m×n чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы, содержащей m строк и n столбцов вида:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется матрицей размера m×n. Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Матрицу обозначают буквами: A, B и записывают сокращенно:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \quad \text{или} \quad A = \left(a_{ij}\right).$$

Например: Матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & 7 \\ 5 & 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ содержит три строки (m=3) и четыре столбца (n=4).

Определение: Матрица, у которой число строк равно числу столбцов: m=n называется квадратной, а число n – порядком матрицы.

Например: Матрица $B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 12 & 5 \end{pmatrix}$- квадратная матрица третьего порядка: m=n=3.

Определение Матрица, у которой все элементы равны нулю, называется нуль-матрицей и обозначается через 0.

Определение: Матрица, состоящая из одной строки (или одного столбца), называется строкой (или столбцом).

Например: Матрицы $C = (-1 \;\; 3 \;\; 4 \;\; 8)$ и $D = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ являются строкой и столбцом.

Пример 1 Швейная фабрика осуществляет сезонную продажу изделий трех видов: платьев, костюмов и пальто некоторому магазину. Выручка от продажи платьев, костюмов и пальто весной составила соответственно: 200 тыс.руб., 100 тыс.руб. и 300 тыс.руб.;

зимой: - 150 тыс.руб., 200 тыс.руб. и 600 тыс.руб.;
летом: - 500 тыс.руб., 50 тыс.руб. и 150 тыс.руб.;
осенью: - 50 тыс.руб., 400 тыс.руб. и 500 тыс.руб.

Решение: Эти данные можно представить в виде матрицы, в строках которой будем указывать суммы, вырученные в различные сезоны, а в столбцах – выручку от продажи различных изделий: платьев, костюмов, пальто:

$$\begin{pmatrix} 200 & 100 & 300 \\ 150 & 200 & 600 \\ 500 & 50 & 150 \\ 50 & 400 & 500 \end{pmatrix}.$$

У квадратной матрицы имеется главная диагональ, состоящая из элементов $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ и побочная,

Математика выявляет порядок, симметрию и определённость, а это – важнейшие виды прекрасного. **Аристотель** состоящая из элементов: $a_{1n}, a_{2n-1}, \ldots, a_{n1}$. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ называются диагональными.

<u>Определение:</u> Квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю, называется <u>диагональной</u> матрицей.

Например: Диагональной является матрица

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

<u>Определение:</u> Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны единице, называется <u>единичной</u> матрицей и обозначается буквой Е:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами:

1. Сложение (вычитание) матриц одинакового размера осуществляется поэлементно:

$C = A \pm B = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m\times n}.$, если $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$ $i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n$

<u>Пример 2</u> Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Найти: А+В и А-В.

<u>Решение.</u>

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1 & -4\\ 11 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$A-B=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 7 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -6\\ -3 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число – каждый элемент матрицы умножается на это число:

$B=k\cdot A=(k\cdot a_{ij})$., если $b_{ij}=ka_{ij}$. $i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n$

Пример 3 Дана матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}$ найти матрицу 4A

Решение.

$$4\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & -5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 4 & 3\cdot 4 & -5\cdot 4\\ 4\cdot 4 & 2\cdot 4 & 0\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 12 & -20\\ 16 & 8 & 0\end{pmatrix}.$$

! При умножении матрицы на число 0 получим нуль-матрицу: $0\cdot A=A\cdot 0=0$.

3. Умножением матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Тогда произведением матрицы $A_{m\times k}\cdot B_{k\times n}$ называется матрица C, каждый элемент c_{ij} которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{mj}$. $i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,n$

Пример 4 Найти произведение матриц

В математике, кроме возможных приложений ее в науке, есть собственный свет и мудрость;

Ж. Ван Гут

$$A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\\ -5 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 8\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение матриц $B_{2\times2}\cdot A_{3\times2}$ не существует, поэтому найдем произведение $A_{3\times2}\cdot B_{2\times2}=C_{3\times2}$. Выделим элементы матрицы С, вначале – элементы первой строки:

c_{11} – это сумма произведений элементов 1-ой строки первой матрицы – сомножителя А на элементы первого столбца сомножителя В:

$$c_{11}=a_{11}\cdot b_{11}+a_{12}\cdot b_{21}=2\cdot(-1)+7\cdot 4=26,$$

аналогично получим:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\\ -5 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot(-1)+7\cdot4 & 2\cdot3+7\cdot8\\ 1\cdot(-1)+4\cdot4 & 1\cdot3+4\cdot8\\ -5\cdot(-1)+(-1)\cdot4 & -5\cdot3+(-1)\cdot8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}26 & 62\\ 15 & 35\\ 1 & -23\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}26 & 62\\ 15 & 35\\ 1 & -23\end{pmatrix}.$ ▲

! Понятие матрицы часто используется в практической деятельности. Например, данные о выпуске продукции нескольких видов в каждом квартале года или нормы затрат нескольких видов ресурсов на производство продукции нескольких типов и т.д. удобно записать в виде матриц.

Пример 5 Хлебокомбинат для производства трех видов продукции использует три вида основного сырья: пшеницу, гречиху и рожь. В таблице приведены нормы расхода сырья каждого вида на производство 1т продукции и плановое задание по производству каждого вида (в т.). Определить суммарный расход пшеницы, гречихи и ржи на выполнение планового задания.

Виды сырья	Нормы расхода сырья (т) на 1т. продукции вида		
	1	2	3
Пшеница Гречиха Рожь	0,7 0,4 0,1	0,4 0,6 –	0,4 0,4 0,2
Плановое задание	100	200	100

<u>Решение.</u> Введем матрицу норм расхода сырья:

$A = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ и матрицу-столбец планового задания

$B = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}.$

Найдем произведение матриц $A \cdot B = C$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}7 \cdot 100 + 0{,}4 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 100 \\ 0{,}4 \cdot 100 + 0{,}6 \cdot 200 + 0{,}4 \cdot 100 \\ 0{,}1 \cdot 100 + 0 \cdot 200 + 0{,}2 \cdot 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 190 \\ 200 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Симметрия является той идеей, с помощью которой человек веками пытается объяснить и создать порядок, красоту и совершенство.

Герман Вейль

Ответ: На выполнение планового задания хлебокомбинату необходимо израсходовать 190 т. пшеницы, 200 т. гречихи и 30 т. ржи.

4. Транспонирование матрицы – переход от матрицы А к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка

$$a_{ij}^T = a_{ji}; \quad i = 1,2,\dots,m; \; j = 1,2,\dots,n$$

<u>Пример 6</u> Найти матрицу $C = A^T - 4B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

<u>Решение:</u> Найдем матрицу A^T, транспонированную к А, т.е. поменяем строки и столбцы местами:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вы уже знаете, как умножать и вычитать матрицы (см. п.1, п.2)

Найдем матрицу $4B$, умножив все элементы матрицы В на 4, произведем вычитание матриц A^T, $4B$ поэлементно:

$$C = A^T - 4B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 16 \\ 0 & 4 \\ 8 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & -15 \\ 1 & -1 \\ -8 & -30 \end{pmatrix}.$$

5. Матрица A^{-1}, обратная к квадратной матрице А, – такая матрица, что $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$,

где $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица того же порядка

<u>Пример 7</u> Выяснить, является ли матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{42} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}$. обратной к матрице $A=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$.

<u>Решение:</u> Найдем произведение $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{42} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{16}{21}+\frac{5}{21} & \frac{40}{21}-\frac{40}{21} \\ \frac{4}{42}-\frac{2}{21} & \frac{10}{42}+\frac{16}{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{4}{21} & \frac{5}{21} \\ \frac{1}{42} & -\frac{2}{21} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \blacktriangle$$

Ответ: В соответствии с определением данные матрицы являются взаимно обратными.

Контрольные вопросы:

- ⇒ Определение матрицы и ее элементов
- ⇒ Понятие квадратной и диагональной матрицы
- ⇒ Общий вид единичной матрицы
- ⇒ Действия над матрицами
- ⇒ Свойства обратных матриц

Нельзя быть настоящим математиком, не будучи немного поэтом.
К. Вейерштрасс

Упражнения:

1. Найти A+B и B-A: $A=\begin{pmatrix}-10 & 8 & 0\\ 6 & -3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & 7 & -5\\ -2 & 8 & 6\end{pmatrix}$.

2. Найти матрицу: –3A: $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 0\\ -2 & 4 & 6\\ 3 & -4 & 2\end{pmatrix}$.

3. Найти произведение матриц $A\cdot B$: $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 6\\ 8 & 4 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 7 & 4\\ -5 & 1\end{pmatrix}$.

4. Найти матрицу $B=(2A)^T$, где $A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 4 & 7\\ -3 & -5\end{pmatrix}$.

5. Выяснить, является ли матрица $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-1}{11} & \frac{1}{44}\\ \frac{3}{11} & -\frac{2}{11}\end{pmatrix}$.

обратной к матрице $A=\begin{pmatrix}-8 & 1\\ 12 & 4\end{pmatrix}$.

——————Личный результат——————

Я могу производить действия над матрицами различных размеров

§2 Определители

Рассмотрим матрицу 2-го порядка:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

<u>**Определение:**</u> число $a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$. называется <u>Определителем (или детерминантом) 2-го порядка</u>

Определитель обозначается так: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

<u>**Пример 8**</u> Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot1-5\cdot4=-17$.

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot4-(-1)\cdot5=13$. ▲

Рассмотрим ***определитель 3-го порядка***: $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, который может быть вычислен по правилу треугольников или правилу Сарруса,

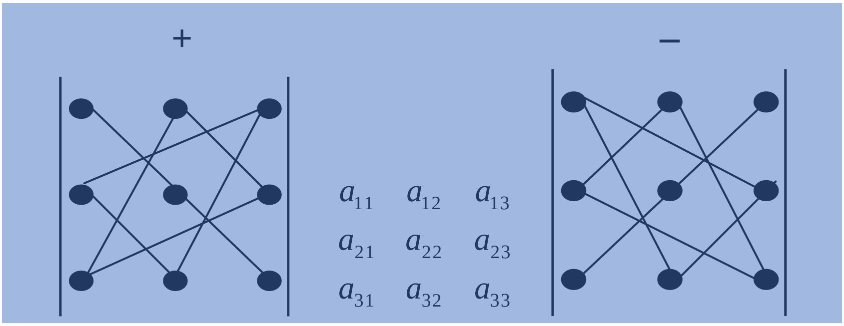
$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}-$$

$$-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}-a_{23}\cdot a_{32}\cdot a_{11}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}$$

где соответствующие произведения элементов берутся либо со знаком плюс «+» (левая схема), либо со знаком минус «-» (правая схема).

Строгость в математике означает, прежде всего, добросовестность и ясность.

Липман Берс



<u>**Пример 9**</u> Вычислить определитель Δ. по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 10 \end{vmatrix}.$$

<u>Решение.</u>

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 1\cdot3\cdot10+2\cdot5\cdot(-5)+(-2)\cdot1\cdot4 - 4\cdot3\cdot(-5) -$$

$$- 2\cdot(-2)\cdot10 - 5\cdot1\cdot1= 30-50-8 +60+40-5=67.$$ ▲

<u>**Определение**</u> <u>Алгебраическим дополнением</u> A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется ее <u>минор</u> M_{ij}, т.е. определитель матрицы, полученный из матрицы А вычеркиванием i-той строки и j-того столбца, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

! Таким образом, если сумма индексов (i+j) является четным числом, то $A_{ij}=M_{ij}$, если нечетным, то $A_{ij}=-M_{ij}$.

Основные свойства определителей.

1-е свойство. При замене строк столбцами определителя и наоборот, без изменения их порядка величина определителя не меняется:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определение: Замена строк столбцами называется транспонированием определителя (аналогично матрицы см. §1, п.4). Транспонированный определитель обозначается Δ^T.

2-е свойство. При перестановке местами любых двух столбцов (строк) знак определителя меняется на противоположный.

3-е свойство. Определитель имеющий два равных столбца (строки) равен нулю.

4-е свойство. Определитель имеющий нулевой столбец (строку) равен нулю.

5-е свойство. Общий множитель элементов одного столбца (строки) можно вынести за знак определителя.

Определение Квадратная матрица А называется невырожденной или неособенной, если ее определитель отличен от нуля, т.е. $|A| \neq 0$

Математика – наука молодых. Иначе и не может быть. Занятия математикой – это такая гимнастика ума, для которой нужны вся гибкость и вся выносливость молодости.

Норберт Винер

! Обратная матрица существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица А невырожденная, т.е. $|A| \neq 0$.

В этом случае ее можно найти по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \tilde{A},$$

$\tilde{A}$ – присоединенная матрица, элементы которой равны алгебраическим дополнениям элементов матрицы A^T, транспонированной к матрице А

Вы уже знаете, как находить транспонированную матрицу (см. §1, п.4)

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель, соответствующий матрице A;

A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

<u>**Пример 10**</u> Найти матрицу, обратную

матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

<u>Решение</u>**.** Найдем A^{-1} по данной формуле.

С помощью правила треугольника вычислим определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 8 + 3 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \cdot 2 -$$

$$- 2 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 7 - 3 \cdot 0 \cdot 8 = 26 \neq 0.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, матрица A – невырожденная и A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij},\, i,j=1,2,3.$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}5 & 1\\ 7 & 8\end{vmatrix}=33;$ $\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 8\end{vmatrix}=-10;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 5 & 1\end{vmatrix}=-7;$ $\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 8\end{vmatrix}=1;$

$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 8\end{vmatrix}=6;$ $\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}0 & 5\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-5;$ $\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-4;$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 5\end{vmatrix}=5;$

Обратная матрица:

$$A^{-1}=\frac{1}{26}\begin{pmatrix}33 & -10 & -7\\ 1 & 6 & -1\\ -5 & -4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{33}{26} & -\frac{10}{26} & -\frac{7}{26}\\ \frac{1}{26} & \frac{6}{26} & -\frac{1}{26}\\ -\frac{5}{26} & -\frac{4}{26} & \frac{5}{26}\end{pmatrix}.$$

Проверяем правильность вычислений

Покажем, что

$A\cdot A^{-1}=E:$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 5 & 1\\ 1 & 7 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{33}{26} & -\frac{10}{26} & -\frac{7}{26}\\ \frac{1}{26} & \frac{6}{26} & -\frac{1}{26}\\ -\frac{5}{26} & -\frac{4}{26} & \frac{5}{26}\end{pmatrix}.=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{33}{26}+\frac{3}{26}-\frac{10}{26} & -\frac{10}{26}+\frac{18}{26}-\frac{8}{26} & -\frac{7}{26}-\frac{3}{26}+\frac{10}{26}\\ 0+\frac{5}{26}-\frac{5}{26} & 0+\frac{30}{26}-\frac{4}{26} & 0-\frac{5}{26}+\frac{5}{26}\\ \frac{33}{26}+\frac{7}{26}-\frac{40}{26} & -\frac{10}{26}+\frac{42}{26}-\frac{32}{26} & -\frac{7}{26}-\frac{7}{26}+\frac{40}{26}\end{pmatrix}=$$

Если мы действительно что-то знаем, то мы знаем это благодаря изучению математики.

Пьер Гассенди

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

где E – единичная матрица 3-го порядка. ▲

<u>Пример 11</u> Для матрицы $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу B^{-1}.

<u>Решение.</u>

Вычислим определитель по правилу треугольника.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot 3\cdot(-2)+0\cdot 4\cdot 1+(-2)\cdot 3\cdot(-2)-$$

$$(-2)\cdot 3\cdot 1-3\cdot 4\cdot 1-0\cdot(-2)\cdot(-2)=-6+0+12+6-12-0=0.$$

Определитель Δ =0, это означает, что матрица B - вырожденная и обратной к ней не существует. ▲

Контрольные вопросы:

- ⇒ Понятие определителя 2-го порядка
- ⇒ Понятие определителя 3-го порядка
- ⇒ Правило треугольников
- ⇒ Понятие алгебраического дополнения
- ⇒ Определение минора элемента матрицы
- ⇒ Основные свойства определителей
- ⇒ Определение невырожденной матрицы
- ⇒ Формула обратной матрицы
- ⇒ Условие существования обратной матрицы

Упражнения:

1. Вычислить определители 2-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 7 & -8 \end{vmatrix}$ б) $\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} 14 & -2 \\ -7 & 1 \end{vmatrix}$

2. Вычислить определители 3-го порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 8 \\ 3 & 0 & -5 \\ 9 & -1 & 1 \end{vmatrix}.$ б) $\begin{vmatrix} -7 & -3 & -1 \\ 0 & 8 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}.$

в) $\begin{vmatrix} 8 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 7 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$

3. Найти обратную матрицу:

а) $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$

б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

———Личный результат———
Я умею находить обратную матрицу

Именно математика в процессе своего развития лишилась материального предмета изучения, и это сделало её всемогущественной наукой.

А.В. Волошинов

§3 Системы линейных уравнений

Определение Системой линейных уравнений относительно неизвестных x_1, x_2, …, x_n называется конечная совокупность уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $a_{ij}, b_i (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ – действительные числа; a_{ij} – коэффициент при неизвестной x_j; b_j – свободный член в i-м уравнении.

! В матричной форме система имеет вид: AX=B, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1j} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \ldots a_{2j} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{ij} \ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ a_{m2} \ldots a_{mj} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Здесь A- матрица системы, X- матрица-столбец переменных, B- матрица-столбец свободных членов.

Определение Решением системы уравнений называется упорядоченная совокупность n чисел

$x_1^0, x_2^0, ..., x_j^0, ..., x_n^0$, которая является решением каждого уравнения системы.

Определение Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Определение Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет бесконечное множество решений.

Определение Две системы уравнений с одним и тем же набором неизвестных называются эквивалентными, если любое решение одной из них является решением другой или если обе системы несовместны.

Определение Преобразования, при которых система уравнений переходит в эквивалентную, называются эквивалентными преобразованиями системы.

! К эквивалентным преобразованиям относятся:

- перенос членов из одной части уравнения в другую;
- почленное умножение правой и левой частей уравнения на один и тот же множитель;
- почленное вычитание из уравнений системы одного какого-либо уравнения.

Способы решения систем линейных уравнений

Если определитель матрицы n линейных уравнений с n переменными $|A| \neq 0$, (т.е. матрица А –

Математика является учением об отношениях между формулами, лишенными какого бы то ни было содержания. **Давид Гильберт** невырожденная), то единственное решение системы определяется:

а) по формулам Крамера $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$, $(j = \overline{1,n})$,

где Δ_j – определитель матрицы, получаемой из матрицы А заменой j-того столбца столбцом свободных членов В.

Вы уже знаете, как находить обратную матрицу (см. §2)

б) методом обратной матрицы по формуле: $X = A^{-1} \cdot B$,

в) Методом Гаусса, с помощью расширенной матрицы

! Методом Гаусса можно решить любую систему линейных уравнений. Для этого составляют расширенную матрицу коэффициентов $A|B$, приписывая к матрице А столбец свободных членов В, затем матрицу $(A|B)$ с помощью элементарных преобразований приводят к ступенчатому виду (так называемый «прямой ход»); далее по полученной матрице выписывают новую систему и решают ее методом исключения переменных: начиная с последних (по номеру) переменных находят все остальные (так называемый «обратный ход»).

Пример 12 Решить систему линейных уравнений методом Крамера, методом обратной матрицы и методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x - 3y - z = -1 \\ 3x + y + 2z = 6 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

Решение.

а) Методом Крамера.

Вычислим определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2-6-6+1-8+9=-8 \neq 0$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение. Вычислим определитель Δ_1, полученный из определителя Δ заменой в нем элементов первого столбца столбцом свободных членов уравнений:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -3 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1-12-30+5+4+18=-16$$

Аналогично вычислим определитель Δ_2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 12-15-2+6-20+3=-16$$

Вычислим определитель Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 10-6-18+1-24+45=8$$

Находим x, y, z по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2; \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2\cdot 2 - 3\cdot 2 + 1 = -1 \\ 3\cdot 2 + 2 - 2\cdot 1 = 6 \\ 2 + 2\cdot 2 - 1 = 5 \end{cases}$$

У людей, усвоивших великие принципы математики, одним органом чувств больше, чем у простых смертных.

Чарльз Дарвин

т.е. решение выполнено правильно.

б) Метод обратной матрицы.

Запишем данную систему в матричной форме: AX=B, где

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1\\ 6\\ 5\end{pmatrix}$$

Для решения воспользуемся формулой: $X = A^{-1}\cdot B$

Найдем обратную матрицу через основной определитель и дополнения:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=2-6-6+1-8+9=-8\neq 0$$

Алгебраические дополнения:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-3;\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-5\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3;\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-7$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5;\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{33}=\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}=11$$

тогда $A^{-1}=\begin{pmatrix}3/8 & -1/8 & 5/8\\ 1/8 & -3/8 & 7/8\\ -5/8 & 7/8 & -11/8\end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix}3/8 & -1/8 & 5/8\\ 1/8 & -3/8 & 7/8\\ -5/8 & 7/8 & -11/8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 6\\ 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/8\\ 16/8\\ -8/8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\\ -1\end{pmatrix}$$

в) Методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 3 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 8 & 0 & 16 \\ 0 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

Запишем последнюю матрицу в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} 8y = 16 \\ 5y + z = 9 \\ x + 2y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ z = -1 \\ x = 5 - 4 + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$$

Проверка:

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 1 = -1 \\ 3 \cdot 2 + 2 - 2 \cdot 1 = 6 \\ 2 + 2 \cdot 2 - 1 = 5 \end{cases}$$ ▲

Ответ: $x_1 = 1;\ x_2 = 3;\ x_3 = 5.$

<u>Пример 13</u> Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн денежных единиц. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения на 70 %, второго – на 40 %. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза.

Какова величина прибыли каждого из отделений

а) в минувшем году; б) в этом году?

<u>Решение:</u> пусть х и у – прибыли первого и второго отделений в минувшем году. Тогда условие задачи можно записать в виде системы:

Часто говорят, что цифры управляют миром; по крайней мере нет сомнения в том, что цифры показывают, как он управляется.
И. Гёте

$$\begin{cases} x+y=12 \\ 1{,}7x+1{,}4y=18 \end{cases}$$

Решив систему, получим x=4, y=8. Следовательно,
а) прибыль в минувшем году первого отделения – 4 млн д. ед., второго – 8 млн д. ед.:
б) прибыль в этом году первого отделения – $1{,}7\cdot 4=6{,}8$ млн д. ед., второго $1{,}4\cdot 8=11{,}2$ млн д. ед. ▲

Контрольные вопросы:

- ⇒ Общий вид системы линейных уравнений
- ⇒ Понятие решения системы уравнений
- ⇒ Определение совместной и несовместной системы уравнений
- ⇒ Определение определенной и неопределенной системы уравнений
- ⇒ Эквивалентные преобразования систем
- ⇒ Способы решения систем линейных уравнений
- ⇒ Понятие расширенной матрицы
- ⇒ Формулы Крамера

————Личный результат————

Я могу решить систему линейных уравнений

§4 Индивидуальные задания

Решить систему уравнений. Составить задачу с экономическим содержанием на использование данной системы уравнений

1. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -9, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -6, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 11, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + x_3 = -3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 13, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -3. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 17, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 19, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 21, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -6. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 + x_3 = 12, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 23, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} 9x_1 - 4x_2 + x_3 = 15, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 25, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 10x_1 - 4x_2 + x_3 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 27, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - x_3 = -4, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 16, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -6. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 = -6, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 18, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -3. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - x_3 = -8, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 20, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - x_3 = -10, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 22, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$

Трудность решения в какой-то мере входит в само понятие задачи: там, где нет трудности, нет и задачи.

Дьердь Пойа

15. $\begin{cases} 5x_1 - 5x_2 - x_3 = -12, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 24, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 6. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - x_3 = -14, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 26, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 9. \end{cases}$

17. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - x_3 = -16, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 28, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 12. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 - x_3 = -18, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 15. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 9x_1 - 5x_2 - x_3 = -20, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 32, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 18. \end{cases}$

20. $\begin{cases} 10x_1 - 5x_2 - x_3 = -22, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 34, \\ -x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 21. \end{cases}$

21. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 8, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

22. $\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 14, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -9. \end{cases}$

23. $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 18, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -8. \end{cases}$

24. $\begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 22, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 17, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -7. \end{cases}$

25. $\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 26, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 20, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$

26. $\begin{cases} -6x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 30, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 23, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -5. \end{cases}$

27. $\begin{cases} -7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 34, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 26, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -4. \end{cases}$

28. $\begin{cases} -8x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 38, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 29, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

29. $\begin{cases} -9x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 42, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 32, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -2. \end{cases}$

30. $\begin{cases} -10x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 46, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 35, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$

Ответы к упражнениям

§1

1) $A+B=\begin{pmatrix}-10 & 15 & -5\\ 4 & 5 & 10\end{pmatrix}$

$B-A=\begin{pmatrix}10 & -1 & -5\\ -8 & 11 & 2\end{pmatrix}$

2) $-3A=\begin{pmatrix}-15 & 3 & 0\\ 6 & -12 & -18\\ -9 & 12 & -6\end{pmatrix}$

3) $A\cdot B=\begin{pmatrix}-33 & 2\\ 59 & 13\end{pmatrix}$

4) $B=\begin{pmatrix}-4 & 8 & -6\\ 0 & 14 & -10\end{pmatrix}$

5) Не является

§2

1) а) 18; б) 30; в) 0
2) а) 206; б) -8; в) 240
3) а) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{-35}{114} & \frac{4}{57} & \frac{-1}{114}\\ \frac{-13}{57} & \frac{16}{57} & \frac{-2}{57}\\ \frac{-1}{114} & \frac{5}{57} & \frac{13}{114}\end{pmatrix}$; б) не существует

Литература

1. Н.Ш. Кремер Высшая математика для экономистов 2-е изд., М.: ЮНИТИ, 2004, 471с
2. Н.Ш. Кремер Высшая математика для экономистов. Практикум М.: ЮНИТИ, 2006, 476с
3. И. Л. Калихман «Линейная алгебра и программирование», М., В.Ш., 1967, 426 стр.
4. Справочник по математике для экономистов, под ред.проф. В.И.Ермакова, М., В.Ш., 1987, 336 стр.
5. В.А. Кудрявцев, Б. Д. Демидович «Краткий курс высшей математики», М., Наука, 1985, 624 с.

Оглавление